

E nacque il sistema binario!

Il padre del sistema binario è il matematico e filosofo tedesco:

Gottfried Wilhelm von Leibniz

è stato un filosofo, matematico, scienziato, logico, teologo, linguista, glottoteta, diplomatico, giurista, storico e magistrato tedesco.

Nascita: 1 luglio 1646, Lipsia, Germania Morte: 14 novembre 1716, Hannover, Germania

Con influenze di: Cartesio, Archimede, Euclide. Seguaci: Immanuel Kant, Eulero, Charles Babbage.

Studenti Illustri: Nicolas Malebranche, Christian Wolff, Jakob Bernoulli.

Consulenti accademici: Christiaan Huygens, Jakob Thomasius, Erhard Weigel, Bartholomäus Leonhard Schwendendörffer.

Questa breve carrellata ^(Wikipedia) dà una parziale idea della grandezza e statura culturale dell'uomo che è stato uno degli scienziati e filosofi più influenti dell'umanità!

Un approccio inedito è quello di iniziare a parlare del filosofo e del matematico, padre del sistema binario, citando questo articolo dove si racconta come il grande filosofo si sia rivolto ai Gesuiti, missionari in Cina, per capire alcuni aspetti della storia dell'antica Cina. Questi aspetti lo interessarono fino al punto di affermare:

“appare quasi necessario l'invio di missionari cinesi presso di noi affinché ci insegnino l'uso e la prassi della Teologia Naturale”

*... il reverendo Padre Bouvet ed io abbiamo scoperto il senso apparentemente più vero, secondo la lettera, dei caratteri di Fohi [Fu Xi], fondatore dell'Impero, che consistono solo nella combinazione di linee intere e spezzate e che passano per i più antichi della Cina, come anche per i più semplici. Ci sono 64 figure comprese nel libro chiamato Ye Kim [**I Ching**], ossia il Libro delle Variazioni [...] si tratta dell'aritmetica binaria che quel grande legislatore sembra aver posseduto e che io ho ritrovato alcune migliaia di anni dopo.*

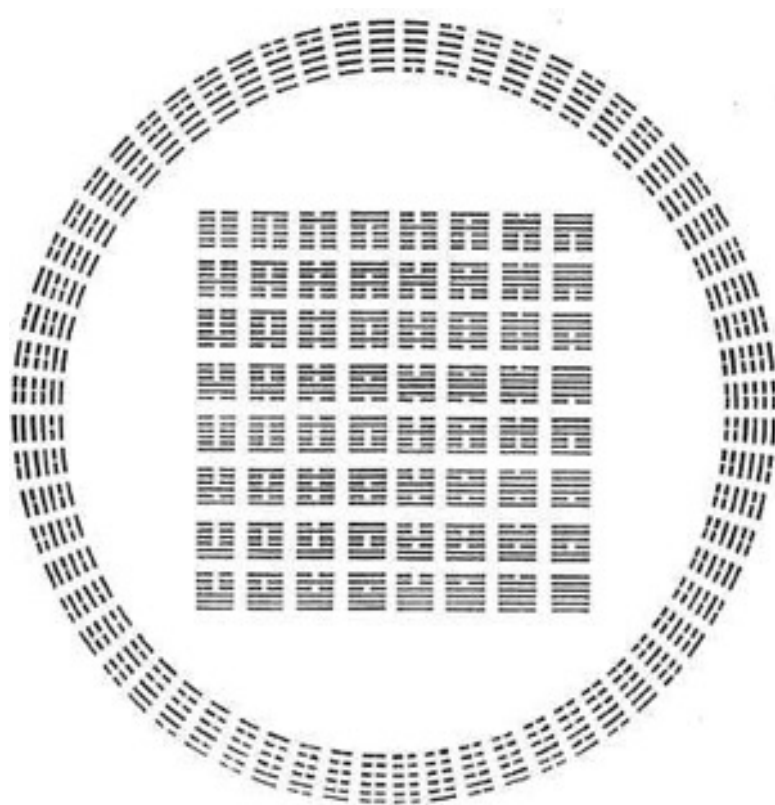
Gottfried Wilhelm von Leibniz in una lettera a Nicole de Redmond del 1715, in riferimento alla “Ruota di Fu Xi” riportata in fondo all'articolo.

... che ben presto noi saremo inferiori ai cinesi in ogni campo: certo non dico ciò perché io invidi loro questa nuova luce, anzi piuttosto me ne rallegro, ma perché bisogna che noi a nostra volta desideriamo apprendere da essi quelle cose che finora potrebbero risultare più vantaggiose per noi, in particolare l'uso della filosofia pratica ed un genere di vita più onesto, per non dire ora di altre loro arti. Certamente mi sembra che la nostra condizione, dato che le corruzioni si stanno diffondendo smisuratamente, è tale da apparire quasi necessario l'invio di missionari cinesi presso di noi affinché ci insegnino l'uso e la prassi della Teologia Naturale, come noi inviamo loro i nostri Missionari a insegnare la Teologia della Rivelazione. Pertanto io credo che, se fosse stato scelto qualche sapiente capace di giudicare non la bellezza delle Dee ma l'eccellenza dei popoli darebbe l'aureo pomo ai cinesi.

Gottfried Wilhelm von Leibniz nella prefazione a “Novissima Sinica” di Giuseppe Suario nel 1697

JOSEPH NEEDHAM 21/12/2011

La nostra comune aritmetica ha per base 10, e l'aggiunta di uno zero all'ultima posizione intera moltiplica il numero per 10. Ma quest'uso è puramente arbitrario. L'aritmetica avrebbe potuto avere per base il 12, nel qual caso le divisioni per tre o per quattro non avrebbero comportato frazioni di numeri interi. Alcune proprietà dei numeri sono fondamentali in ogni sistema, mentre altre dipendono dalla base arbitrariamente scelta. Per esempio, il fatto che, sommando insieme numeri dispari, si abbia la serie dei quadrati, si verificherebbe comunque, indipendentemente dalla base scelta. Ma che tutti i multipli di 9 siano cifre che, una volta sommate, danno 9 non è una proprietà fondamentale e deriva semplicemente dal fatto che il 9 è il penultimo numero nella serie di base arbitrariamente scelta. A **Leibniz** venne in mente che sarebbe stata possibile e forse anche utile un'aritmetica avente come **base il 2**; in quest'aritmetica "binaria" o "diadica", uno zero aggiunto a qualsiasi numero avrebbe avuto la proprietà di moltiplicarlo soltanto per 2, proprio come nella comune aritmetica lo moltiplica per 10.



Per approfondire sulla natura binaria dei caratteri FO HI consultare:

https://www.adalovelace.it/leibniz_02-i-caratteri-fohi/

Figura 1 caratteri FO HI

I numeri verrebbero pertanto rappresentati nel modo seguente:

1=1; 2=10; 3=11; 4=100; 5=101; 6=110; 7=111; 8=1000; 9=1001; 10=1010; 11=1011; 12=1100; 13=1101; 14=1110; 15=1111; ...

Senza addentrarci in dotte disquisizioni filosofiche accettiamo che Leibniz abbia introdotto il sistema di numerazione binario e assecondiamo il sogno di Leibniz.

Il sogno di Leibniz

Con questa espressione Giuseppe Peano¹, “il maestro del pensiero formale”, battezzò nel 1898 la prima formulazione di Leibniz, del più meraviglioso programma di ricerca progressivo della storia della conoscenza umana: LA LOGICA MATEMATICA.

Così racconta Leibniz:

*“...Studiando questo problema di logica, arrivai come spinto da una necessità interna a questa idea straordinaria: doveva essere possibile costruire una **caratteristica universale della ragione**, mediante la quale, in qualsiasi dominio, tutte le verità si presenterebbero alla ragione in virtù di un metodo di calcolo, come nell’aritmetica o nell’algebra....Di conseguenza, quando sorgeranno controversie tra due filosofi, non sarà più necessaria una discussione; sarà sufficiente infatti che prendano in mano le penne, si siedano di fronte agli abachi e si dicano l’un l’altro: **CALCULEMUS!**”*

Tutto era cominciato due secoli prima, nel Seicento, con la **Rivoluzione Scientifica**².

La nascita dell’*algebra simbolica* e l’esplosione della idea del ‘**regno dei segni**’ (algebra e lo zero) come dimora della scienza ne era stato forse il processo fondamentale. E sin dall’inizio era stato un tema su cui convergevano l’empirismo e pragmatismo inglese e la filosofia razionalistica tedesca.

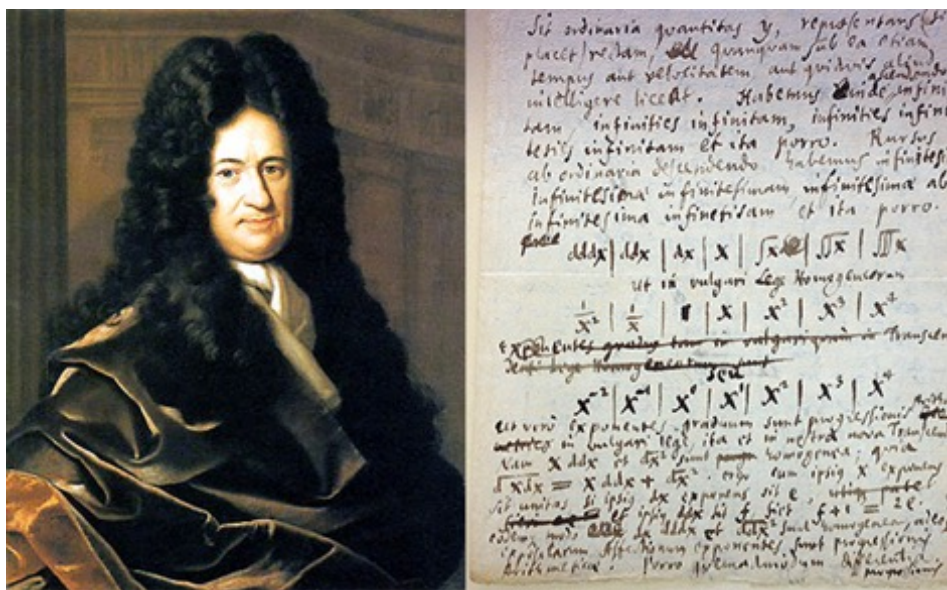


Figura 2 Gottfried Wilhelm von Leibniz e suoi appunti di calcolo infinitesimale

¹ Giuseppe Peano è stato un matematico, logico e glottoteta italiano. Fu l'ideatore del latino sine flexione, una lingua ausiliaria internazionale derivata dalla semplificazione del latino classico.

² Come non ricordare colui che fece passare l’umanità dalle visioni religiose e della metafisica alla percezione della realtà con il “metodo scientifico”: **Galileo Galilei**.

Da un lato Hobbes e Locke, dall'altro Leibniz concepirono l'idea che ***il pensiero sia calcolo***. Nei *"Nuovi Saggi sull'Intelletto Umano"* (1705) Leibniz critica Locke, ma in fondo ne condivide l'agenda dei problemi.

Il regno dei segni per Leibniz (1646-1716) come per la successiva matematica tedesca è il linguaggio della 'teoria', mentre per la matematica inglese è il 'calcolo'. Nella tradizione culturale empirista inglese il pensare è in primo luogo associazione di 'idee', che conserveranno a lungo la loro originale natura di 'immagini mentali' costruite induttivamente dall'esperienza sulle cose.

L'idea che emerge tra gli empiristi è che il calcolo, anche se le idee sono eterogenee rispetto ai segni, può riflettere la associazione e separazione tra le 'idee'. Ha un ruolo solo pratico, i 'segni' nel mondo sono degli intrusi, e lo stesso Newton, padre del calcolo differenziale, per la sua fisica userà la rappresentazione geometrica, adoperando le tecniche differenziali solo per fare qualche 'calcolo', inventando a tal fine anche le tecniche per il calcolo approssimato.

Per Leibniz invece ***l'ars combinatoria***, la scienza della manipolazione dei segni, è omogenea alla aritmetica nel costituire il linguaggio di base della scienza, ed ha due aspetti che sono ancora oggi alla base della nostra idea di 'linguaggio di rappresentazione': una è la ***characteristica universalis***, cioè un lessico in grado di tradurre in sequenza di segni un qualsiasi fatto esprimibile, e l'altra è il ***calculus ratiocinator***, cioè una notazione simbolica in grado di ricavare tutte le inferenze e di descrivere tutti i calcoli.

Prima del protocomputer

Siamo rimasti all'idea del proto computer, la macchina analitica di Babbage, e al primo sw creato da Ada Lovelace. La macchina era destinata, nell'idea del suo progettista, a risolvere le equazioni differenziali e gli sviluppi in serie di funzioni per creare tabelle numeriche precise e affidabili. Solo Ada, con la sua forte personalità e sensibilità femminile, osò pensare altri utilizzi, ma siamo sempre nel campo dei numeri costruiti con un alfabeto di dieci cifre (0.....9).

Per arrivare alla definizione di bit (contrazione di binary digit) composto da un alfabeto di due soli numeri (0, 1) bisogna percorrere un lungo cammino e dare un accenno alle principali teorie logiche-filosofiche-matematiche-elettroniche che ci introdurranno nella moderna era dell'informazione digitale.

I protagonisti principali di questa cavalcata culturale sono:

1. **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (Lipsia, 1-lug-1646 – Hannover, 14-nov-1716) è stato un matematico, filosofo, scienziato, logico, teologo e altro. Lo si può definire un genio universale.
2. **George Boole** (Lincoln, 2-nov-1815 – Ballintemple, 8-dic-1864) è stato un matematico e logico britannico, ed è considerato il fondatore della logica matematica.

3. **Claude Elwood Shannon** (Petoskey, 30-apr-1916 – Medford, 24-feb-2001) è stato un ingegnere e matematico statunitense è definito “il padre della teoria dell’informazione”.

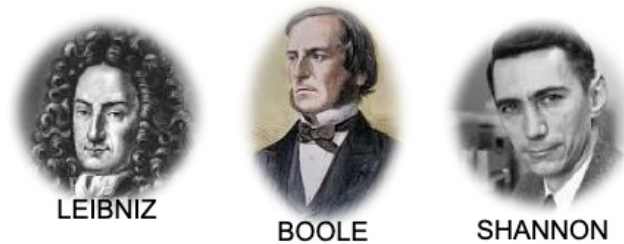


Figura 3 I tre "moschettieri" dell'informatica

Cominciamo da Leibniz e dalla sua idea meravigliosa, già accennata precedentemente. Voleva creare un alfabeto speciale i cui elementi non stessero per suoni, ma per concetti. Non un alfabeto fonetico, ma un alfabeto composto di lettere che potevano assumere il significato di simboli e/o concetti in modo da creare un linguaggio che, basato su questo alfabeto, si potesse stabilire per mezzo di calcoli simbolici quali suoi enunciati erano VERI o FALSI e quali relazioni intercorrevano tra essi.

La logica aristotelica, senza addentrarci oltre, proponeva la **suddivisione dei concetti in categorie**, quindi Leibniz paragonò il ragionamento a un meccanismo. Il suo intendimento era ridurre ogni ragionamento a una sorta di calcolo e da ultimo costruire una macchina capace di calcolare.

Leibniz pensava a una *caratteristica universale*, cioè un sistema di simboli che non solo fosse reale ma abbracciasse anche il pensiero umano in tutta la sua estensione.

“.....è la notazione algebrica a incarnare l'ideale della caratteristica universale e a servire da modello. Un sistema di simboli ben scelto sia utile e indispensabile per il pensiero deduttivo.....”

Nel far riferimento all’aritmetica e all’algebra Leibniz osservò come queste discipline dimostrino quanto sia importante un buon simbolismo. Aveva in mente i vantaggi della numerazione araba introdotta in Europa da Leonardo Pisano detto il Fibonacci....

Il matematico pisano **Leonardo Fibonacci**, vissuto tra il 1175 e il 1235 e autore di due testi fondamentali per le scienze matematiche del Medioevo e per l’umanità: il primo è il “*Liber abbaci*” pubblicato nel 1202 e successivamente rielaborato nel 1228; il secondo è la “*Practica geometriae*”, dato alle stampe nel 1220.

La prima opera è particolarmente significativa. Emergono elementi biografici sulla vita di Fibonacci, il quale visse in una località del nord-Africa presso Algeri, dove entrò in contatto con la cultura araba. Conobbe le opere di Euclide e, infine, si stabilì definitivamente a Pisa. Nel “*Liber abbaci*” Leonardo Fibonacci espone il contenuto e le funzionalità della numerazione posizionale indiana – adottata in un secondo momento dagli Arabi – fino a quel momento praticamente sconosciuta in Europa, e tratta una serie di problemi matematici, come la famosa successione numerica in cui ogni elemento è uguale alla somma dei due precedenti (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...).

Si tratta in conclusione di un testo fondamentale per le scienze matematiche, che ha permesso l'introduzione in Europa dei numeri arabi.



Figura 4 Introduzione della numerazione araba

I numeri arabi (o meglio indo arabi) erano percepiti più come entità esoteriche che strumenti di calcolo, solo i grandi matematici come Leibniz e Newton avevano capito appieno quale poteva essere la loro funzione.

Saltando un po' di passaggi e interessandoci solo agli argomenti di questa dissertazione, ci limitiamo a dire che: **Leibniz fece una scoperta che lo colpì molto per la sua semplicità: la notazione binaria! Questa notazione permetteva di scrivere qualsiasi numero usando solo 0 e 1!**

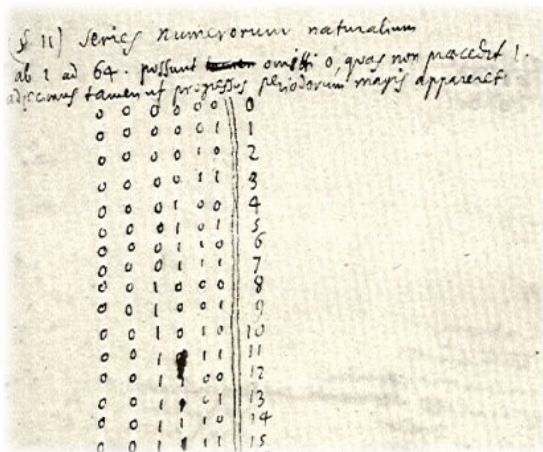


Figura 6 Stesura originale di Leibniz del sistema binario

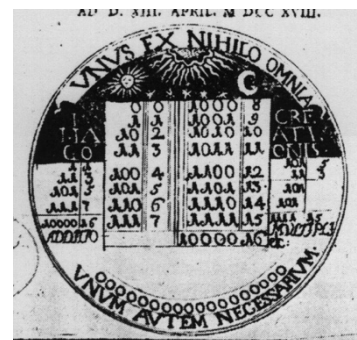


Figura 5 Medaglione commemorativo con il sistema binario

Pensò, quindi a un grande programma suddiviso in tre parti:

1. Bisognava creare un compendio, un'enciclopedia che abbracciasse tutta la conoscenza umana;
2. La scelta delle funzioni fondamentali e cruciali e dei simboli a esse adeguati;
3. Ricercare le regole deduttive e come manipolare questi simboli (calculus ratiocinator) che dovranno diventare i fondamenti della logica simbolica.

Per lui nell'Universo non c'era nulla d'indeterminato o accidentale, ma tutto era conforme a un piano perfettamente chiaro nella mente di Dio, il quale aveva creato il migliore dei mondi possibili: di conseguenza tutti gli aspetti del mondo, naturali e soprannaturali, erano collegati da RELAZIONI. Era lecito sperare di **scoprirLE** con gli strumenti della ragione solo ponendoci in tale prospettiva.

".....uomini seri e di buona volontà seduti attorno ad tavolo per risolvere qualche spinoso problema, potranno formularlo nella caratteristica universale e dire CALCULEMUS....."

Questo, ovviamente, applicando alcune regole dell'algebra che valgono comunque, in qualche misura, sia per i concetti logici, sia per i numeri.

Leibniz, che parlava con tanta passione e convinzione della caratteristica universale, all'atto pratico fece ben poco per realizzarla; cercò invece più volte di produrre un calculus ratiocinator.

In un frammento del suo tentativo meglio riuscito Leibniz propone, in anticipo di un secolo e mezzo, un'algebra della logica che specifichi le regole di manipolazione dei concetti logici, così come l'algebra ordinaria specifica le regole di manipolazione dei numeri. Un passaggio fondamentale è quello di rappresentare le proposizioni, in modo abbreviato, con delle lettere (a, b, c.....p, q, r) e queste proposizioni possono assumere solo carattere di VERO o FALSO.

DEFINIZIONE 3 [Dire che] A è in L o che L contiene A è lo stesso che dire che L può essere fatto coincidere con una pluralità di termini, assunti insieme, uno dei quali è A . $B \oplus N = L$ significa che B è in L e che B e N insieme compongono o costituiscono L . Questo vale anche di un numero di termini più grande.

ASSIOMA 1 $B \oplus N = N \oplus B$.

POSTULATO Più termini qualsiasi come A e B possono essere assunti insieme per comporre un termine solo $A \oplus B$.

ASSIOMA 2 $A \oplus A = A$.

PROPOSIZIONE 5 Se A è in B e $A = C$, C è in B .
Infatti, sostituendo C ad A nella proposizione A è in B , si ottiene C è in B .

PROPOSIZIONE 6 Se C è in B e $A = B$, C è in A .
Infatti, sostituendo A a B nella proposizione C è in B , si ottiene C è in A .

PROPOSIZIONE 7 A è in A .
Infatti A è in $A \oplus A$ (per la definizione 3), e quindi (per la proposizione 6) A è in A .

...

PROPOSIZIONE 20 Se A è in M e B è in N , $A \oplus B$ è in $M \oplus N$.

Frammento di un calcolo logico di Leibniz

Figura 7 Frammento di un calcolo logico di Leibniz

Leibniz introduce un simbolo speciale, che rappresenta la combinazione di molteplicità di oggetti del tutto arbitrarie; il concetto, in sostanza, è di combinare due collezioni in una collezione unica che contenga tutti gli elementi dell'una e dell'altra.

$$A \oplus A = A$$

Figura 8 Relazione fondamentale, molto fondamentale

Il segno + suggerisce un'analogia con la somma ordinaria, ma il cerchietto in cui è racchiuso avverte che questa non è in tutto e per tutto addizione ordinaria, perché quelli che vengono sommati non sono numeri.

L'assioma che è presentato è lo stesso che, in un contesto diverso diventerà la **pietra angolare della logica di Boole**.

Questo assioma esprime il fatto che combinando una molteplicità di termini con sé stessa non si ottiene niente di nuovo (è chiaro che combinando tutte le cose appartenenti a una collezione con quella stessa collezione produrremmo, di nuovo solo la collezione di partenza). Ovviamente l'addizione numerica è del tutto diversa $2+2=4$ e non 2.

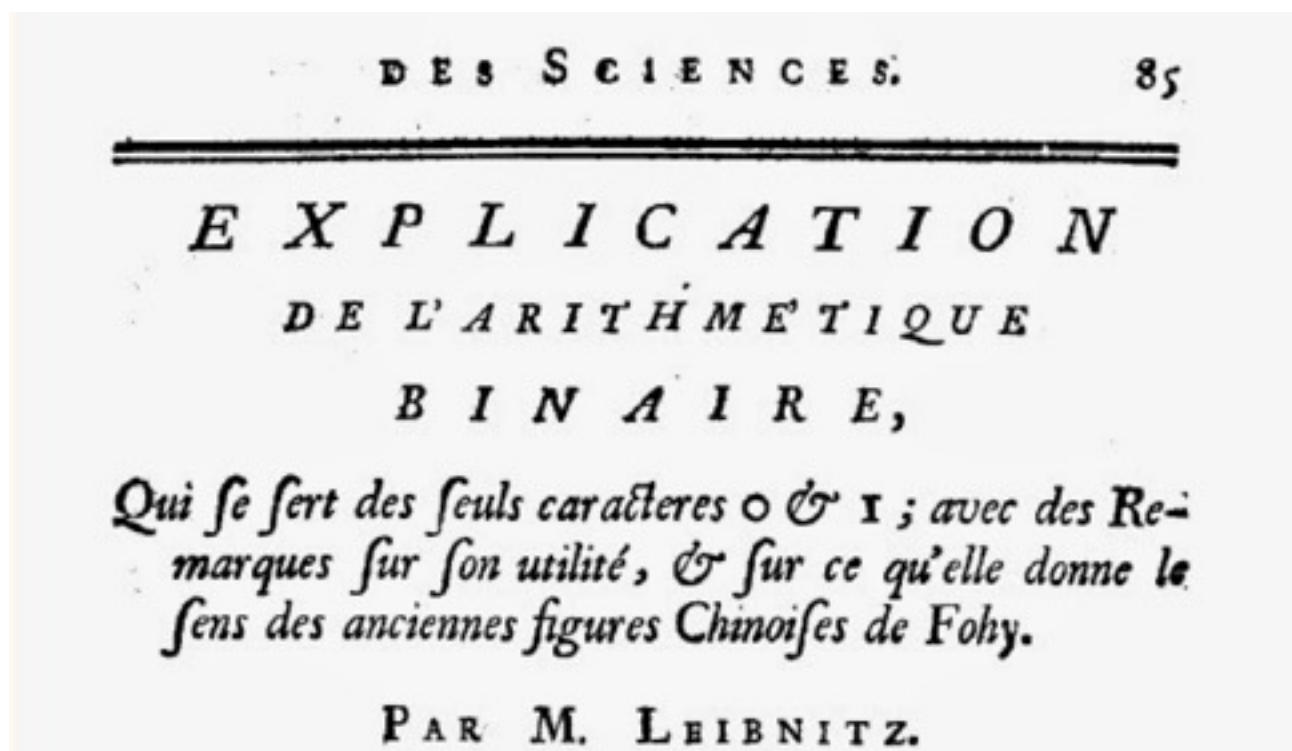


Figura 9 Testo originale di Leibnitz

Ovviamente questi scritti sono in francese, lingua ufficiale scientifica del periodo.....

Sistema binario o duale (0, 1)

Per parlare del sistema duale si deve ripercorre la storia del calcolo dell'umanità. I sistemi di numerazione, all'alba dei tempi, erano essenzialmente di tipo antropomorfo e facevano riferimento alle dieci dita³ e quindi operiamo con dieci simboli che tutti conoscono:

...0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Le cifre⁴ del sistema numerico possono essere considerate alla stregua dei “mattoncini Lego”, con i “mattoncini Lego” è possibile costruire qualsiasi cosa, con le dieci cifre a disposizione siamo in grado di produrre qualsiasi numero di qualsivoglia valore! La magia è senz'altro dovuta all'introduzione della **zero**. Con lo zero è possibile costruire i numeri facendo riferimento alle loro posizioni e assegnando a queste posizioni uno specifico valore.

Il numero 6476 è composto da quattro cifre il primo 6 rappresenta le *migliaia*, il 4 le *centinaia*, il 7 le *decine*, il secondo 6 le *unità* e si legge: **seimila quattrocento settanta sei**.

Con questo esempio si è visto come si possono usare più volte la stessa cifra (6) e questa assumere valori diversi a seconda della posizione. Un numero si può esprimere anche in forma polinomiale. Questa modalità riesce a far comprendere l'importanza della posizione:

$$6 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 6000 + 400 + 70 + 6$$

Osservate la cifra sei occupa la quarta posizione a partire da sx e il suo valore è secondo la potenza di dieci alla terza, quindi delle migliaia.....e così per le altre cifre il cui valore dipende dalla posizione assunta.

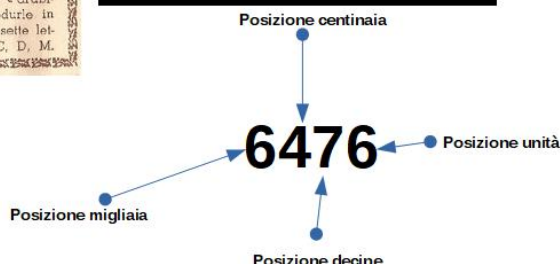
La fig.2 evidenzia in immagini la conquista della civiltà ha fatto con il riconoscere lo zero e il valore del sistema posizionale. Il matematico che introdusse lo zero e l'algebra fu Leonardo Pisano, detto il Fibonacci. È anche conosciuto per la serie che ha preso il suo nome.

³ Alcuni sistemi di numerazione adoperavano anche la base venti. Il sistema di numerazione usato dai Maya era vigesimale, posizionale e comprendeva l'uso dello zero. I numeri erano rappresentati attraverso tre simboli, una conchiglia vuota, un puntino ed una striscia. A volte le cifre erano rappresentate come glifi a forma di faccia

⁴ Una **cifra** (dall'arabo sifr الصفر 'aṣ-ṣifr) è un simbolo utilizzato per rappresentare numeri in un sistema numerico (per esempio il numero 37 è composto dalle **cifre** 3 e 7). Il sistema numerico decimale utilizza dieci **cifre** per rappresentare i numeri naturali.



Leonardo Fibonacci detto il Pisano, il matematico italiano che introdusse nel mondo occidentale il sistema numerico decimale



Si legge seimila quattrocento settanta sei

Utilizzando le dieci cifre (come mattoncini della Lego) e la posizione, possiamo costruire qualsiasi numero di qualsivoglia valore.

0 zero
La cifra denominata zero ha un valore nullo. È la chiave della costruzione dei numeri nel sistema numerico decimale, perché permette di posizionare le altre cifre e far assumere loro il valore desiderato.

10 dieci
100 cento
3001 tremila uno

Figura 10 sistema di numerazione decimale

Ora passiamo al sistema duale o sistema binario, con questo sistema abbiamo solo due “mattoncini Lego” zero (0) e uno (1). Sono chiamati **bit** dalla contrazione di due parole *binary digit*.

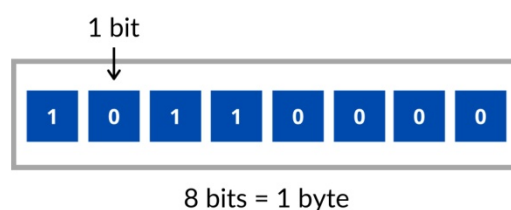
Osserviamo il passaggio da numero binario a numero decimale:

$$10 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2 + 0 = 2$$

$$100 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4 + 0 + 0 = 4$$

$$1000 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8 + 0 + 0 + 0 = 8$$

Il fatto che i simboli usati per costruire un numero nel sistema binario siano due, comporta che il corrispettivo numero decimale possa essere espresso in forma polinomiale con una somma di potenze di due dove l'esponente non è altro che la POSIZIONE assunta dalla cifra binaria.



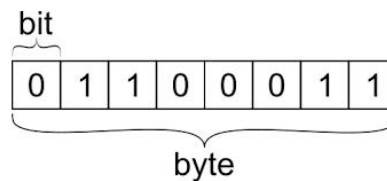
numeri in decimale	numeri in binario
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010

$$10 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2 + 0 = 2$$

$$100 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4 + 0 + 0 = 4$$

$$1000 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8 + 0 + 0 + 0 = 8$$

Sistema duale perché i simboli usati sono due. Un numero binario può essere visto come una somma di potenze di due dove l'esponente indica la POSIZIONE.



CODICE BINARIO - ALFABETO

a	01100001	n	01101110
b	01100010	o	01101111
c	01100011	p	01110000
d	01100100	q	01110001
e	01100101	r	01110010
f	01100110	s	01110011

Figura 11 sistema duale

Costruire un numero binario è semplice: con il numero decimale (due) riutilizzo le cifre 0 1 scrivendo 10, per il (tre) 11, per il (quattro) 100 e così via utilizzando sempre e solo le cifre 0 1 ma, giocando sulla posizione di queste.

In questa figura abbiamo introdotto anche la definizione di byte come gruppo di otto bit. Il byte è la “parola” con la quale noi comunichiamo e riceviamo risposte dal PC. Possiamo farlo, quindi, adoperando linguaggi composti da lettere dell’alfabeto a noi più usuali. Solo programmatori molto esperti comunicano con il pc usando un linguaggio macchina (assembly) molto vicino ai bit.

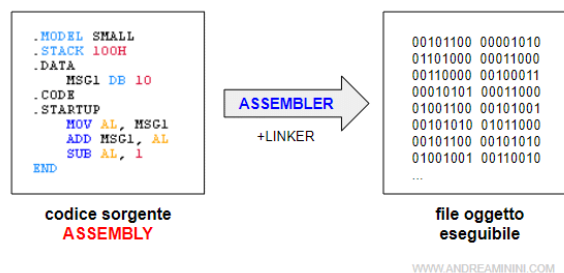


Figura 12 assembler

Perché operiamo con il sistema duale? È il nostro modo di pensare occidentale descritto mirabilmente da Aristotele con la definizione dei concetti di VERO/FALSO. Una proposizione può essere considerata

VERA/FALSA, questa è la base della logica aristotelica (la nostra logica) e come si può notare la natura di questa logica è **binaria o duale**.

George Boole

A questo punto della narrazione, sempre nel periodo storico vittoriano, introduciamo in modo più approfondito un altro personaggio che ha segnato profondamente il pensiero informatico: **George Boole**.

È un personaggio fondamentale nella storia dell'evoluzione del pensiero informatico, ha permesso la formalizzazione matematica della logica aristotelica. Le parole segnate qui sotto, sono le parole chiave del suo pensiero.

And, Or, Not, True, False [George Boole]

Nella *“Investigazione sulle leggi del pensiero”*⁵ Boole sosteneva testualmente:

"Progetto del seguente trattato è quello di investigare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente tramite le quali viene effettuato il ragionamento... Tali studi destano anche interesse di altro tipo derivato dalla luce che essi fanno sulle facoltà intellettive. Essi ci istruiscono sul modo in cui il linguaggio e i numeri servono come strumenti per i processi del ragionamento"

"Le leggi del pensiero, in tutti i processi di concezione e di ragionamento, in tutte quelle operazioni di cui il linguaggio è l'espressione o lo strumento, sono della stessa specie delle leggi di quelli che vengono riconosciuti come processi tipici della matematica".

George Boole (Irlanda, 1815-1864), logico, matematico e filosofo è colui che ha portato a compimento in forma organica il progetto di Wilhem Leibniz (ridurre la logica al calcolo).

CALCULEMUS!⁶

Boole riuscì a costruire un'algebra - chiamata con il suo nome (algebra booleana) o detta logica bivalente. È costituita dalle tre operazioni di somma logica, prodotto logico e complemento (negazione) applicate all'insieme costituito dai soli due numeri 0 e 1.

⁵Ideò nel 1847 *“The Mathematical Analysis of Logic”* un libro fondamentale che individuava le modalità per scrivere in forma algebrica la logica proposizionale. Sviluppò poi nel 1854 in *“An Investigation of the Laws of Thought”* altro libro fondamentale che iniziava a formalizzare matematicamente la logica simbolica usando le leggi dell'algebra. Questa algebra prese il nome di *“algebra di Boole”*. Si è rivelata uno strumento teorico indispensabile nel campo dell'elettronica digitale per la realizzazione di quei circuiti che prenderanno il nome di *“LOGIC GATES”*. Cosa che avverrà nel 1940 con Claude Elwood Shannon. Il libro *“An Investigation of the Laws of Thought on The Mathematical Theories of Logic and Probabilities”* di George Boole, è un'opera che apre l'era dell'informatica moderna. Boole è stato professore di matematica in quello che allora era il Queen's College di Cork, in Irlanda.

⁶*“Secondo ciò — scrive Leibniz — quando sorga una controversia, non ci sarà più necessità di discussione tra due filosofi di quella che c'è tra due calcolatori. Sarà sufficiente prendere una penna, sedersi al tavolo e dirsi l'un l'altro: calcoliamo (calculemus)!”.*

Boole riuscì così con il suo sistema a rappresentare la logica del sillogismo⁷ di Aristotele. Il fatto dirompente è che questo semplice sistema risulta equivalente (isomorfo) alla logica proposizionale del primo ordine: **basta mettere "1 = vero" e "0 = falso" e, per le operazioni, " And = prodotto = disgiunzione" " Not = complemento = negazione", " Or = somma = congiunzione"**

Questo giustifica ampiamente il titolo che l'irlandese scelse per la sua opera maggiore: *"Una investigazione sulle leggi del pensiero, sulle quali sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilità"*.

In seguito sono state messe a punto altre forme molto efficaci per rappresentare l'algebra di Boole - ed a essa equivalenti - quali per esempio i già ricordati diagrammi di Eulero-Venn o le tavole di verità (Charles Peirce).

L'idea su cui si basa la logica booleana è quella di immaginare due insiemi logici estremi: il Tutto, cioè l'insieme universale, che contiene ogni possibile cosa, e il Nulla, ovvero l'insieme vuoto, che non contiene nessun oggetto. Boole indica il Tutto col numero 1, e chiama 0 il Nulla. Poi prova ad immaginare cosa resta della nostra matematica se ci limitiamo a questi due numeri.

Le quattro operazioni sono sostanzialmente le stesse: $1+0 = 1$, perché Tutto + Nulla = Tutto, e così via. Unica eccezione: $1 + 1 = 1$, perché se aggiungo il Tutto al Tutto ottengo ancora il Tutto.

Claude Shannon (Tesi di master: Un'analisi simbolica dei relè e dei circuiti di commutazione, 1937) propose di indicare con 1 lo stato di un interruttore chiuso nel quale passa corrente, e con 0 lo stato di un interruttore aperto. Ad esempio due interruttori in serie su di una lampadina rappresentano un circuito AND perché debbono essere entrambi chiusi affinché la lampadina si accenda. Due interruttori in parallelo rappresentano un circuito OR perché è sufficiente che uno dei due sia chiuso perché passi corrente e la lampadina si accenda.

Ancora oggi le unità centrali e le memorie dei computer fanno largo uso di componenti bi-stabili (flip-flop) che sono basati sulle porte logiche AND, NOT e OR. Shannon in particolare dimostrò che qualunque circuito può essere rappresentato come concatenamento più o meno complicato di due sole porte logiche: la moltiplicazione (AND) e la negazione (NOT).

⁷ sillogismo Termine filosofico con cui Aristotele designò la forma fondamentale di argomentazione logica (s. categorico), costituita da tre proposizioni dichiarative connesse in modo tale che dalle prime due, assunte come premesse, si possa dedurre una conclusione (per es., «tutti gli uomini sono mortali, tutti i Greci sono uomini, quindi tutti i Greci sono mortali»); un ragionamento condotto con un s. è necessario (cioè sempre corretto) e formale, nel senso che la correttezza del ragionamento stesso dipende dalla sua struttura (forma) e non dal significato delle parole (come uomo, mortale ecc.).

Anche per quanto riguarda il software gli operatori logici, introdotti inizialmente da Boole, sono fondamentali nei linguaggi di programmazione, nei sistemi di ricerca dei data-base e nelle funzioni logiche dei fogli elettronici.

Tre sono in conclusione le dimensioni in cui si può inquadrare la ricerca di Boole sulla logica: la dimensione linguistica, quella psicologica e quella matematica. La logica è intimamente connessa con la teoria del linguaggio, ma il linguaggio è solo uno strumento, e non indispensabile, della logica. La psicologia esprime le possibilità e i limiti della attività simbolizzatrice dell'uomo, nel senso che la giustificazione ultima di un procedimento logico è sempre un atto mentale. Boole, separando la logica dal tradizionale ambiente filosofico, è convinto della natura matematica del processo logico inferenziale: anche operativamente la logica mutua dalla matematica tutti gli strumenti tecnici di rigore, di simbolizzazione e di procedure risolutive che le permettono d'indagare in maniera feconda e sistematica i propri problemi.

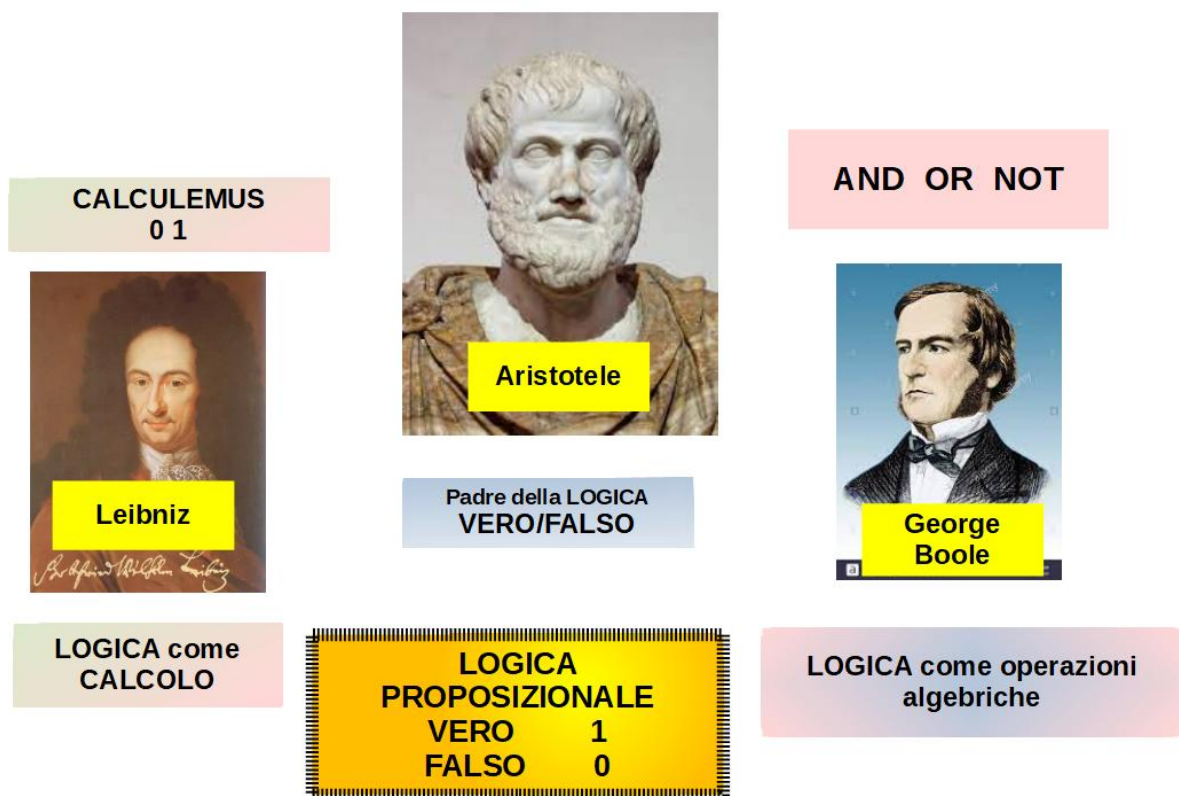


Figura 13 I padri della LOGICA.

Vediamo come funzionano gli operatori AND (e congiunzione), OR (oppure), NOT (negazione no). Questa parte è anche chiamata *logica proposizionale*. Supponiamo di avere delle proposizioni che presentino un

indiscutibile valore di verità VERO/FALSO, non sono ammesse proposizioni dubitative o imperative o altra natura delle quali non sia pienamente accertabile il valore di verità. Esempio:

1. Il sole è un pianeta (FALSO)
2. Pavarotti è un cantante lirico (VERO)
3. 3 è un numero dispari (VERO)
4. Roma è la capitale della Francia (FALSO)
5. Devi studiare (valore di verità non definito)
6. Forse domani faremo il lavoro (valore di verità non definito)

Possiamo operare con queste proposizioni con gli operatori logici e le regole dell'algebra booleana.

Per semplificare possiamo assegnare alle prime quattro proposizioni dei simboli nell'ordine:

p, q, r, s

valutiamo il contenuto di verità della seguente frase:

Pavarotti è un cantante lirico **e (AND) Roma è la capitale della Francia**

p AND r

VERO e FALSO

$$1 * 0 = 0$$

Diversi modi di rappresentare la frase, con l'ultimo abbiamo il valore di verità complessivo $1 * 0 = 0$ quindi il valore di verità complessivo: FALSO

Pavarotti è un cantante lirico **O (OR) Roma è la capitale della Francia**

P OR r

VERO O FALSO

$$1 + 0 = 1$$

Diversi modi di rappresentare la frase, con l'ultimo abbiamo il valore di verità complessivo $1 + 0 = 1$ quindi il valore di verità complessivo: VERO

Consiglio didattico: la logica booleana è piuttosto “asciutta” e priva di tutti gli orpelli e significati nascosti o sottintesi del nostro interpretare quotidiano, bisogna accettarla “matematicamente” appoggiandosi al linguaggio degli insiemi. Charles Lutwidge Dodgson (1832/1898), è stato uno scrittore, matematico, fotografo, logico e prete anglicano britannico dell'età vittoriana, meglio conosciuto con lo pseudonimo di Lewis Carroll: il padre di “Alice nel paese delle meraviglie”. È colui che ha rappresentato nel modo più affascinante la logica booleana.



Foto di Alice Liddell, realizzate da Charles Lutwidge Dodgson alias Lewis Carroll. È lei la bimba che ha ispirato la figura di “Alice nel paese delle meraviglie”.

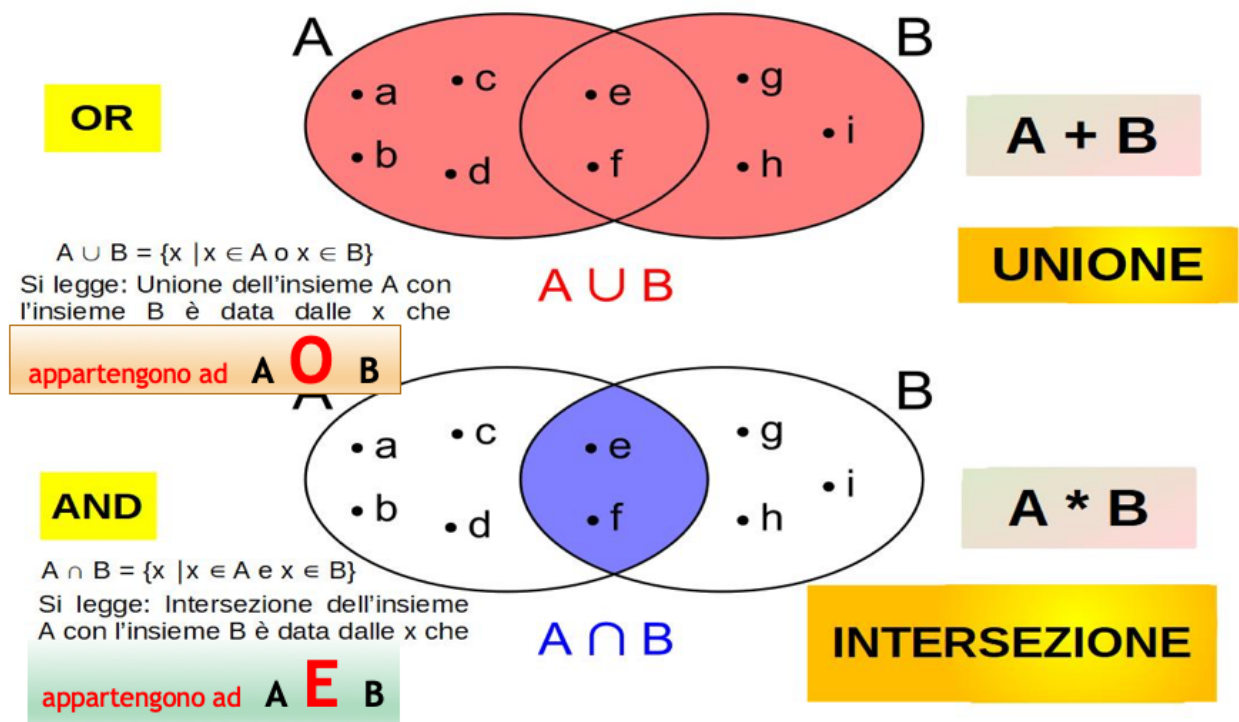


Figura 14 connettivi logici AND & OR e isomorfismo con la teoria degli insiemi

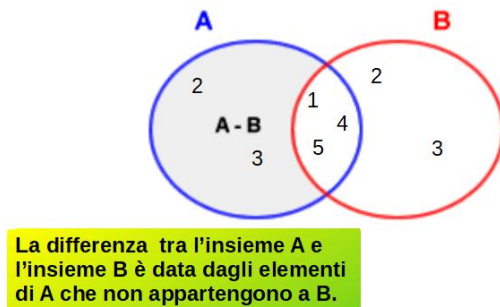
Invece con la negazione, il terzo operatore logico, di tipo unario, si verifica la seguente situazione:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \quad B = \{2,3\}$$

$$A - B = \{1,4,5\}$$

$$A - B = \{x | x \in A \cap x \notin B\}$$

La rivoluzionaria algebra di Boole ha la peculiarità di essere isomorfa con la teoria degli insiemi. Tutti e tre i connettivi logici AND, OR, NOT e le loro operazioni sono isomorfe a quelle degli insiemi.



$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{2, 3\}$$

$$A - B = \{1, 4, 5\}$$

$$A - B = \{x | x \in A \cap x \notin B\}$$

Figura 15 la negazione NOT o differenza di insiemi

Tabelle di verità

Charles Sanders Peirce⁸ è stato un matematico, filosofo, semiologo, logico, scienziato e accademico statunitense. Conosciuto per i suoi contributi, oltre che alla logica anche all'epistemologia, Peirce è stato un importante studioso, considerato fondatore del pragmatismo e uno dei padri della moderna semiotica.

Quello che a noi interessa di più è la realizzazione delle tabelle di verità, diventate uno strumento indispensabile per operare con l'algebra booleana. Il filosofo e logico americano è importante perché ha trovato le correlazioni tra la logica booleana e l'elettronica prima ancora del suo divenire. Quello che a noi interessa sono l'introduzione delle tavole di verità che diventeranno uno strumento matematico indispensabile per l'introduzione delle Logic Gates.

⁸ Nascita: 10 settembre 1839, Cambridge, Massachusetts, Stati Uniti. Morte: 19 aprile 1914, Milford, Pennsylvania, Stati Uniti.



Figura 16 Charles Peirce e le tavole di verità

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tavole di verità Charles Peirce

NOT			AND				OR		
P	nonP		P	Q	P AND Q		P	Q	P OR Q
V	F		V	V	V		V	V	V
F	V		V	F	F		V	F	V
			F	V	F		F	V	V
			F	F	F		F	F	F

NOT			AND				OR		
P	nonP		P	Q	P AND Q		P	Q	P OR Q
1	0		1	1	1		1	1	1
0	1		1	0	0		1	0	1
			0	1	0		0	1	1
			0	0	0		0	0	0

VERO
FALSO

1 VERO
0 FALSO

Figura 17 Tavole di verità

Esiste una stretta correlazione tra i simboli di V/F e le cifre del sistema duale 0/1.

Osserviamo bene queste tavole per capirne l'importanza!

1. Le proposizioni sono indicate come le variabili di una equazione (p, q, r, s.....);
2. Le operazioni con i connettivi NOT AND OR sono eseguite operando con gli asserti VERO/FALSO (V/F);
3. Le stesse sono poi eseguite con i numeri del sistema binario 1 0 dove 1 sta per VERO e 0 per FALSO.

Questo è l'inizio per il grande salto dell'algebra booleana nell'elettronica e la progettazione e realizzazione delle porte logiche o Logic Gates, cuore pulsante dei computer.

Claude Elwood Shannon

Claude Elwood Shannon (Petoskey, 30 aprile 1916 – Medford, 24 febbraio 2001) è stato un ingegnere e matematico statunitense, definito come "il padre della teoria dell'informazione".

Il testo "An Investigation of the Laws of Thought" fu pubblicato nel 1854, ma solo nel 1938 con il lavoro di Shannon l'algebra booleana trovò la sua piena utilizzazione e significato.⁹

Nel 1938 presentando la tesi *Un'analisi simbolica dei relè e dei circuiti*. In questo studio Shannon dimostrò che il fluire di un segnale elettrico attraverso una rete di interruttori - cioè dispositivi che possono essere in uno di due stati - segue esattamente le regole dell'algebra di Boole, se si fanno corrispondere i due valori di verità - VERO e FALSO - della logica simbolica - allo stato APERTO o CHIUSO di un interruttore. Pertanto un circuito digitale può essere descritto da un'espressione booleana, la quale può poi essere manipolata secondo le regole di quest'algebra. Shannon definì così un potente metodo, ancora oggi usato, per l'analisi e la progettazione dei sistemi digitali di elaborazione dell'informazione.

Questo è stato il salto che ci ha portato nell'era moderna del computer!

La rappresentazione dei circuiti elettrici si avvale di interruttori che hanno la natura binaria di APERTO/CHIUSO. Il circuito può avere due interruttori in serie e quindi il suo comportamento simula una porta AND, può avere due interruttori in parallelo e allora simula una porta OR, oppure un circuito può avere un interruttore invertitore e simulare una porta NOT. Ripetiamo che i primi due connettivi AND OR sono operatori che agiscono su due grandezze e per questo sono chiamati operatori binari mentre il connettivo NOT agisce su una sola grandezza e allora viene chiamato operatore unario.

I concetti fondamentali sono:

- I circuiti fondamentali sono tre: AND OR NOT
- Con la combinazione di questi tre circuiti si ottengono tutti gli altri operatori, tra i quali: NAND XOR...NOR ecc.....
- La miniaturizzazione e la nascita dei chip ha permesso di implementare questi Logic Gates ed arrivare alla costruzione dei moderni computer.

Le seguenti figure (LOGIC GATES) rappresentano lo schema operativo dei tre circuiti fondamentali, più il circuito XOR che rappresenta l'O esclusivo (aut...aut) esempio: o fai studi o ti diverti, non puoi fare contemporaneamente le due cose! Le Logic Gates possono essere replicate facilmente in una scala reale in

⁹ Solo ottantaquattro anni dopo Boole venne riconosciuto come uno dei più grandi matematici del tempo. Nel corso della sua la sua opera passò nel dimenticatoio oscurata da altre che ebbero maggiore risonanza mondiale come "L'origine della specie" pubblicata da Charles Darwin nel 1859.

laboratorio per comprendere il semplice meccanismo. Occorrono una lampadina che simula il valore di del filo di rame che simula il circuito e una tavoletta quale implementare il circuito.

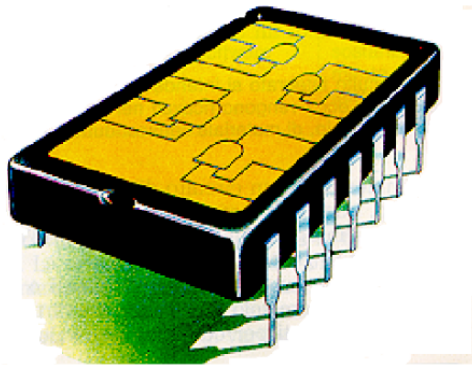
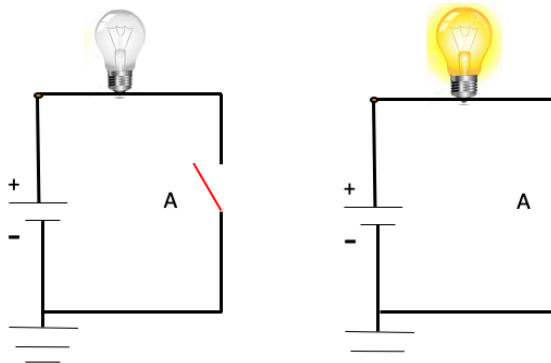


Figura 18 CHIP 7408

Questo è un esempio di chip che opera con quattro porte AND. Si vedono chiaramente i piedini collegati alle porte: due portano il segnale alla porta AND e il terzo il risultato dell'operazione. Es. se il primo segnale porta corrente e il secondo no la risultante sarà no corrente, se invece i primi due portano corrente anche il terzo porterà corrente, come esemplificato dalle tavole di verità.

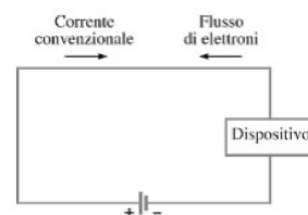
verità,
sulla

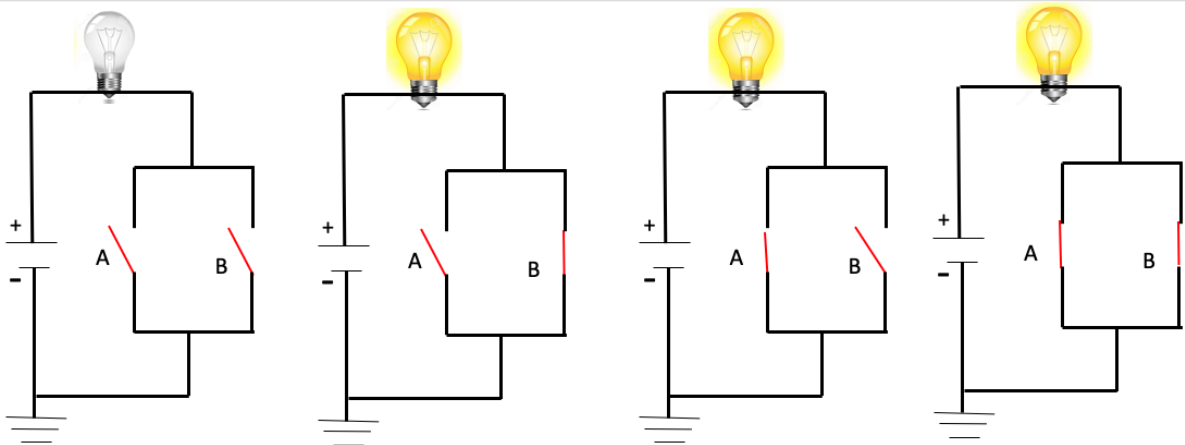


La tensione di lavoro è sempre di 5 Volt

A	lamp
0	off
1	on

CIRCUITO SEMPLICE

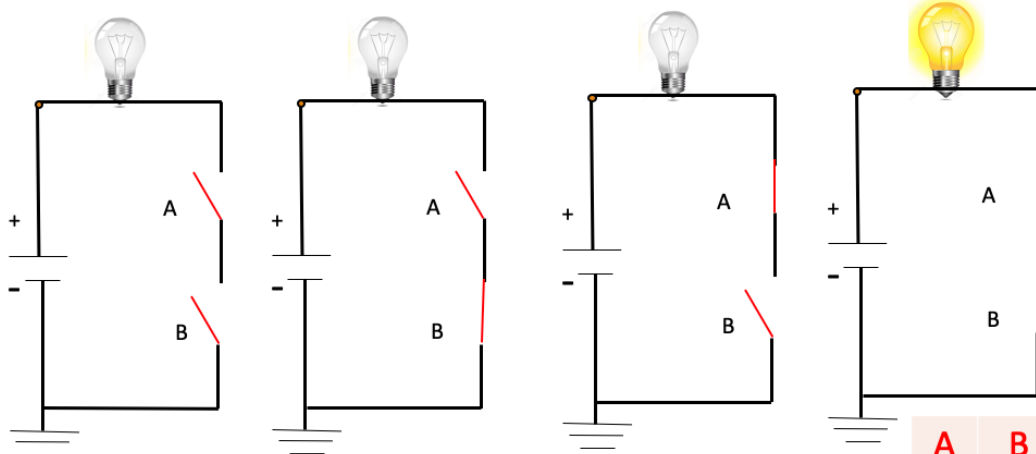




CIRCUITO CON DUE INTERRUTTORI IN PARALLELO
SIMULA LOGIC GATE OR



A	B	A+B	lamp
0	0	0	off
0	1	1	on
1	0	1	on
1	1	1	on



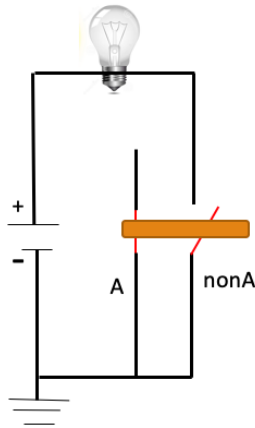
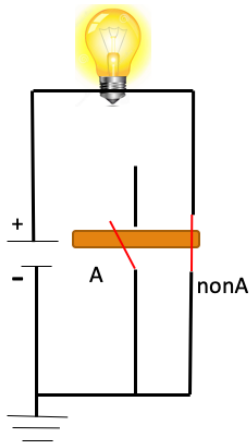
CIRCUITO CON DUE INTERRUTTORI IN SERIE
SIMULA LOGIC GATE AND



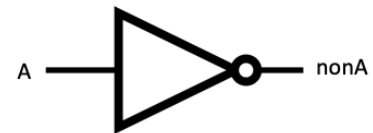
A B
sono
INPUT

lamp (Q)
OUTPUT
AND

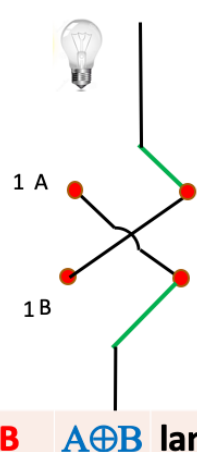
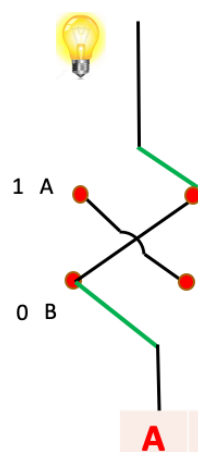
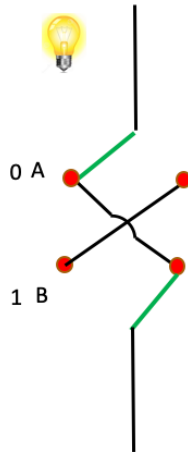
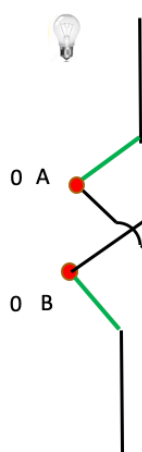
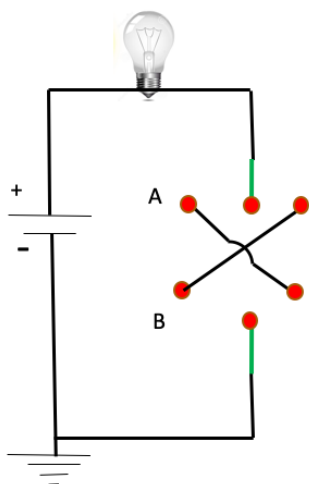
A	B	A · B	lamp
0	0	0	off
0	1	0	off
1	0	0	off
1	1	1	on



A	nonA	lamp
0	1	on
1	0	off



**CIRCUITO CON UN INTERRUTTORE INVERTITORE
SIMULA LOGIC GATE NOT**



A	B	$A \oplus B$	lamp
0	0	0	off
0	1	1	on
1	0	1	on
1	1	0	off



**CIRCUITO CON DUE INTERRUTTORI DEVIATORI
SIMULA LOGIC GATE XOR**