

# Capitalizzazione

## Capitalizzazione semplice e composta

### Introduzione

*Prima di passare allo svolgimento e relativa spiegazione matematica della capitalizzazione vi voglio raccontare una storiella di pura fantasia!!*

Siamo nel Medio Evo all'epoca dei cavalieri.

La cavalleria, o codice cavalleresco, è un codice di condotta informale e variabile sviluppato in Europa tra il 1170 e il 1220. Era associato all'istituzione cavalleresca cristiana medievale; i comportamenti di cavalieri e gentiluomini erano regolati da codici sociali cavallereschi, sempre basati sull'onore e sul servizio verso i più deboli e la chiesa. Nella sostanza i cavalieri erano sempre alla ricerca di imprese memorabili, una di queste era la partecipazione alle Crociate dove potevano conquistare gloria, fama e ricchezze. Ma, gran parte dei cavalieri erano poveri.....



Il cavaliere Ralph era povero e senza mezzi e quindi si rivolge al suo ricco signore, Sir Arthur, chiedendogli se può finanziarlo per comprare cavallo, armatura e affittare uno scudiero così da potersi recare alle Crociate e lì comportarsi come deve comportarsi un vero cavaliere!! Sir Arthur acconsente e gli presta una ingente somma di denaro. Ralph gli comunica che sarà suo dovere onorare questo debito: questo quando avrà conquistato fama e ricchezze!

Nella società medievale i prestiti fatti tra gentiluomini erano considerati patti d'onore e non contava in quanto tempo potevano essere soddisfatti!

In questa storia di fantasia abbiamo un altro cavaliere povero: George.

George era un cavaliere povero come Ralph e anche lui voleva partecipare alle Crociate, ma non era ben visto da Sir Arthur e quindi fu costretto a rivolgersi a un ricco mercante ebreo di nome Abramo Levi chiedendogli un ingente prestito in denaro.

*Il popolo ebraico da sempre è stato sottoposto alla diaspora.*

*La Diaspora ebraica è la dispersione del popolo ebraico avvenuta, in seguito a vicissitudini storiche, durante il regno di Babilonia e sotto l'impero romano.*

*In seguito il termine assunse il significato più generale di migrazione.*

*Poi nel Medio Evo assunse anche un carattere prettamente religioso e persecutorio, difatti gli ebrei venivano considerati dal popolino e dalle gerarchie religiose coloro che avevano contribuito a crocifiggere nostro Signore Gesù Cristo. Di conseguenza vi fu una intolleranza più o meno accentuata verso gli ebrei se non addirittura una avversione. Ogni stato promulgò editti e leggi che non favorivano l'insediamento e la fusione con le popolazioni locali: non era consentito avere proprietà immobiliari o coltivare campi, non erano neanche consentiti matrimoni misti!*

*Agli ebrei non rimase altro che diventare abili artigiani, studiosi, ma soprattutto abilissimi commercianti. Non potendo avere beni e il loro destino era sempre precario soggetto all'umore del singolo regnante, li costrinse a trasformare tutti loro guadagni in oro e denari, facilmente trasportabili e occultabili in caso di destino avverso con cacciata dal posto dove abitavano.*

Ritornando a noi, Levi rispose al povero cavaliere George e disse:

**“Ti concedo il prestito da te richiesto, ma ricordati che: IL TEMPO è DENARO!!!”**

Questo è il concetto alla base della capitalizzazione: è il concetto di INTERESSE.

“Mi restituirai la somma che ti presto, in più voglio una somma che costituirà l'Interesse che sarà in funzione del tempo trascorso”

**Per il cavaliere George non era quindi un patto d'onore, ma un ferreo patto commerciale!**

## Capitalizzazione semplice

Recepito il concetto che il tempo è denaro, si è passati velocemente al calcolo dell'interesse e quindi di quanto poteva fruttare un capitale nel tempo. Fu definito il concetto di Montante: il capitale più l'interesse.

Le formule per calcolare l'Interesse e il Montante sono riportate qui sotto:

$$\begin{aligned} I &= C \cdot r \cdot t \\ M &= C \cdot (1 + r \cdot t) \\ M &= C + I \quad M = C + C \cdot r \cdot t \quad M = C \cdot (1 + r \cdot t) \\ C &= \frac{I}{r \cdot t} \quad r = \frac{I}{C \cdot t} \quad t = \frac{I}{C \cdot r} \end{aligned}$$

Figura 1 formule capitalizzazione semplice

| Capitalizzazione semplice |                     |
|---------------------------|---------------------|
| M                         | montante            |
| C                         | capitale (iniziale) |
| t                         | tempo               |
| r                         | tasso d'interesse   |
| I                         | interesse           |

Figura 2 Nomi adoperati per la capitalizzazione semplice

Supponiamo di avere un C capitale di 100 e di impiegarlo per un tempo di 9 anni al tasso d'interesse del 7%.

Nella tabella, sotto riportata, sono state applicate le formule sopra citate per il calcolo dell'Interesse e del Montante. Dopo 9 anni il capitale di 100 impiegato al tasso d'interesse al 7% frutta 63 di Interesse che sommato al Capitale 100 porta l'investimento ad un Montante di 163. L'andamento di crescita della funzione di capitalizzazione semplice è un andamento lineare come illustrato dal grafico.

| tempo    | montante   | interesse |
|----------|------------|-----------|
| 0        | 100        | 0         |
| 1        | 107        | 7         |
| 2        | 114        | 14        |
| 3        | 121        | 21        |
| 4        | 128        | 28        |
| 5        | 135        | 35        |
| 6        | 142        | 42        |
| 7        | 149        | 49        |
| 8        | 156        | 56        |
| <b>9</b> | <b>163</b> | <b>63</b> |
| 10       | 170        | 70        |
| 11       | 177        | 77        |

|                |     |
|----------------|-----|
| C capitale     | 100 |
| r tasso %      | 7%  |
| t tempo (anni) | 9   |

$$I = C \cdot r \cdot t$$

$$M = C + I$$

È l'equazione di una retta di I grado con l'intercetta dell'asse delle x corrispondente a C e il coefficiente angolare corrispondente a  $r \cdot t$ .

Figura 3 tabella investimento a cap. semplice

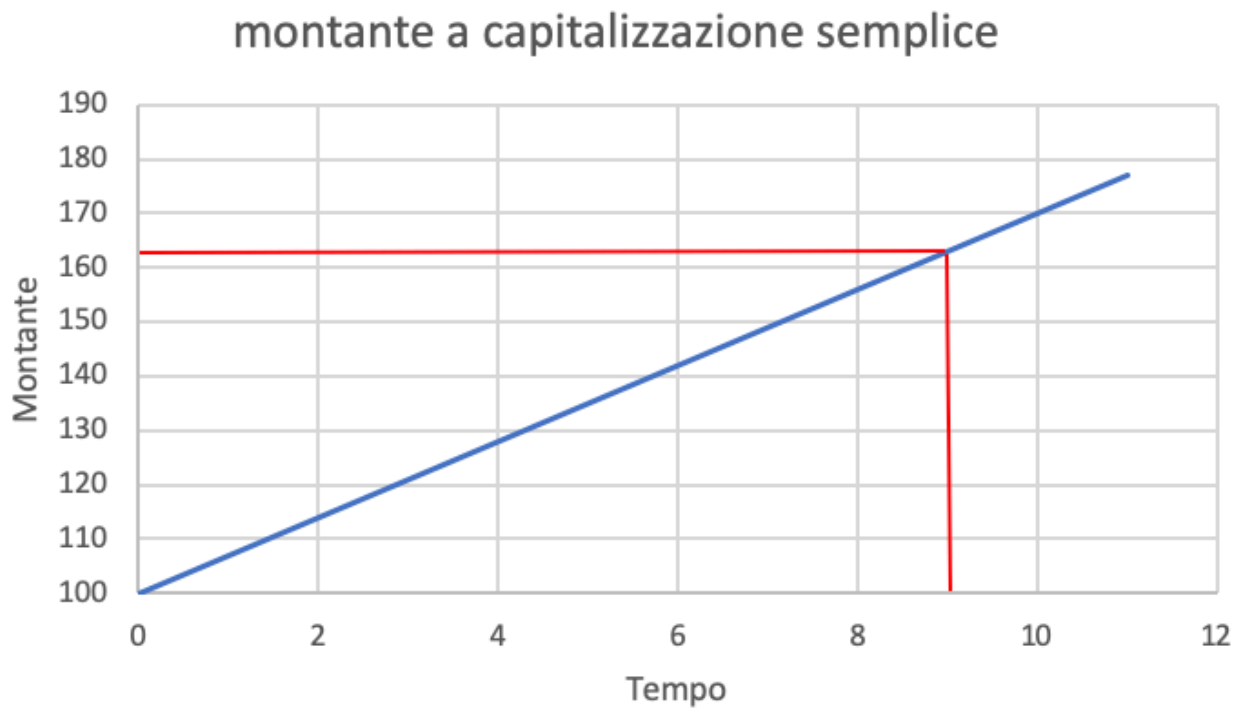


Figura 4 grafico cap. semplice

|    | A                             | B                                                                                                                  | C        | D              | E        | F        | G        | H        | I | J | K | L | M | N | O | P |
|----|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------------|----------|----------|----------|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Operazioni di prestito</b> |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  |                               | <b>capitalizzazione semplice</b><br>$I = C \cdot r \cdot t$<br>$M = C \cdot (1 + r \cdot t)$<br>formula base       |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 |                               | <b>#VALORE!</b><br>è un valore di errore, viene generato quando si adopera un argomento o un operando non corretto |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 | <b>dati</b>                   |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 |                               | <b>M</b>                                                                                                           | <b>C</b> | <b>I</b>       | <b>r</b> | <b>a</b> | <b>m</b> | <b>g</b> |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 18 |                               | ?                                                                                                                  | ?        | 63             | 7,00%    | 9        | 0        | 0        |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 19 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 |                               | ricerca del montante                                                                                               |          | #VALORE!       |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 21 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 22 |                               | ricerca del capitale                                                                                               |          | 100            |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 23 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 24 |                               | ricerca dell'interesse                                                                                             |          | non eseguibile |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 25 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 26 |                               | ricerca del tasso                                                                                                  |          | non eseguibile |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 27 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 28 |                               | ricerca del tempo                                                                                                  |          | non eseguibile |          | a        | m        | g        |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 29 |                               |                                                                                                                    |          |                |          | #VALORE! | #VALORE! | #VALORE! |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 30 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 31 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 32 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 33 |                               | le celle dove inserire i dati sono denominate:                                                                     |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 34 |                               | m_1 (montante) c_1 (capitale) l_1 (interesse) r_1 (tasso d'interesse) a_1 (anni) mm_1 (mesi) gg_1 (giorni)         |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 35 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 36 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 37 |                               | <b>1° situazione ricerca dell'interesse I e del montante M noti C, r, t</b>                                        |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 38 |                               | <b>M</b>                                                                                                           | <b>C</b> | <b>I</b>       | <b>r</b> | <b>a</b> | <b>m</b> | <b>g</b> |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 39 |                               | ?                                                                                                                  | 100      | ?              | 7,00%    | 9        | 0        | 0        |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 40 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 41 |                               | <b>2° situazione ricerca del capitale C noti I, r, t</b>                                                           |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 42 |                               | <b>M</b>                                                                                                           | <b>C</b> | <b>I</b>       | <b>r</b> | <b>a</b> | <b>m</b> | <b>g</b> |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 43 |                               | ?                                                                                                                  | ?        | 63             | 7,00%    | 9        | 0        | 0        |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 44 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 45 |                               | <b>3° situazione ricerca del tasso r noti C, I, t</b>                                                              |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 46 |                               | <b>M</b>                                                                                                           | <b>C</b> | <b>I</b>       | <b>r</b> | <b>a</b> | <b>m</b> | <b>g</b> |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 47 |                               | ?                                                                                                                  | 100      | ?              | ?        | 9        | 0        | 0        |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 48 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 49 |                               | <b>4° situazione ricerca del tempo t noti C, I, r</b>                                                              |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 50 |                               | <b>M</b>                                                                                                           | <b>C</b> | <b>I</b>       | <b>r</b> | <b>a</b> | <b>m</b> | <b>g</b> |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 51 |                               | ?                                                                                                                  | 100      | 63             | 7,00%    | ?        | ?        | ?        |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 52 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 53 |                               | Il tempo è frazionato in anni mesi e giorni                                                                        |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 54 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 55 |                               |                                                                                                                    |          |                |          |          |          |          |   |   |   |   |   |   |   |   |

**Capitalizzazione semplice**

M montante  
C capitale (iniziale)  
t tempo  
r tasso d'interesse  
I interesse

$$I = C \cdot r \cdot t$$

$$M = C \cdot (1 + r \cdot t)$$

$$M = C + I \quad M = C + C \cdot r \cdot t \quad M = C \cdot (1 + r \cdot t)$$

$$C = \frac{I}{r \cdot t} \quad r = \frac{I}{C \cdot t} \quad t = \frac{I}{C \cdot r}$$

? montante =SE(T(m\_1)="?";c\_1\*(1+t\_1\*(a\_1+mm\_1/12+g\_1/360));"non eseguibile")

? capitale =SE(T(c\_1)="?";l\_1/(t\_1\*(a\_1+mm\_1/12+g\_1/360));"non eseguibile")

?interesse =SE(T(l\_1)="?";c\_1\*t\_1\*(a\_1+mm\_1/12+g\_1/360);"non eseguibile")

? tasso =SE(T(t\_1)="?";l\_1/(c\_1\*(a\_1+mm\_1/12+g\_1/360));"non eseguibile")

? tempo =SE(E(T(a\_1)="?";T(mm\_1)="?";T(g\_1)="?");l\_1/(c\_1\*t\_1);"non eseguibile")

le zone sono denominate:

m\_1 montante; c\_1 capitale; t\_1 tasso d'interesse;

tempo a\_1 anni, mm\_1 mesi, g\_1 giorni

tempo

#VALORE! =TRONCA(C28)

#VALORE! =((C28-TRONCA(C28))\*360)/30

#VALORE! =ARROTONDA((I33-TRONCA(I33))\*30;0)

formule e funzioni adoperate

T(val) val è il valore da verificare es. T(c\_1)="?"

SE(test;se\_vero;se\_falso)

E(logico1;logico2;logico3....)

TRONCA(num;num\_cifre) num è il numero da troncato, num\_cifre è un numero che specifica la precisione del troncamento, 0 (zero) se omissa

Il tempo è calcolato di sulla base di: anno(a) mesi/12 giorni/360

$$t = a + \frac{mm}{12} + \frac{gg}{360}$$

esempio:

3 anni 5 mesi 25 giorni

=3+5/12+25/360 = 3,486111111

Figura 5 Foglio.xlsx sulla capitalizzazione semplice

## Capitalizzazione composta

La capitalizzazione composta è una operazione finanziaria nella quale gli interessi relativi a ogni periodo di capitalizzazione non vengono scorporati dal capitale, ma producono essi stessi ulteriori interessi.

### Capitalizzazione composta

L'interesse composto è l'aggiunta di interessi alla somma principale di un prestito o di un deposito, o in altre parole, gli interessi sul capitale più gli interessi.

$$M = C \cdot (1 + r)^t$$

Figura 6 Formula generale della capitalizzazione composta

| tempo    | montante com  |
|----------|---------------|
| 0        | <b>100,00</b> |
| 1        | <b>107,00</b> |
| 2        | <b>114,49</b> |
| 3        | <b>122,50</b> |
| 4        | <b>131,08</b> |
| 5        | <b>140,26</b> |
| 6        | <b>150,07</b> |
| 7        | <b>160,58</b> |
| 8        | <b>171,82</b> |
| <b>9</b> | <b>183,85</b> |
| 10       | <b>196,72</b> |
| 11       | <b>210,49</b> |

Figura 7 Tabella capitalizzazione composta



## MONTANTE COM

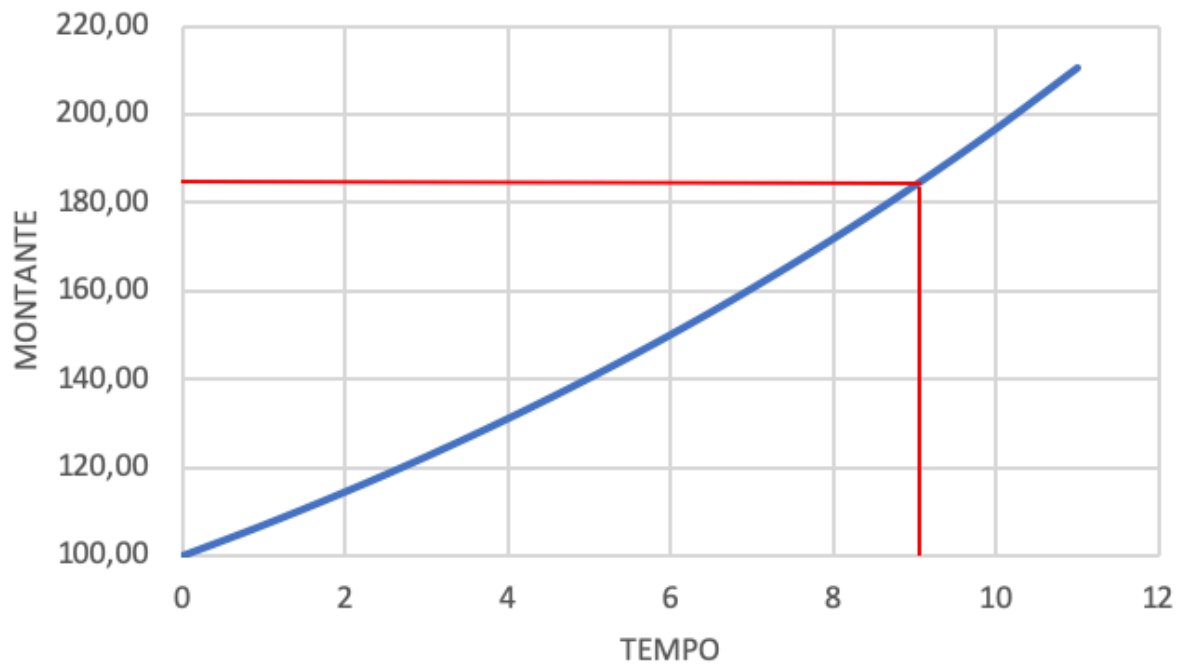


Figura 8 Grafico capitalizzazione composta

### Capitalizzazione composta

#### M montante C capitale r tasso d'interesse t tempo

Nel regime di capitalizzazione composta l'interesse prodotto in ogni periodo si somma al capitale e produce a sua volta interessi, di modo che il montante è calcolato con una formula dove il tempo è posto in esponente:  $M = C(1+r)^t$ , dove  $(1+r)^t$  è il fattore di capitalizzazione composta.

$$M = C \cdot (1 + r)^t$$

$$(1 + r)^t = \frac{M}{C} \quad t \cdot \ln(1 + r) = \ln(M) - \ln(C) \quad t = \frac{\ln M - \ln C}{\ln(1 + r)}$$

$$C = \frac{M}{(1 + r)^t}$$

$$C = M \cdot (1 + r)^{-t}$$

$$M = C \cdot (1 + r)^t \quad (1 + r)^t = \frac{M}{C} \quad 1 + r = \sqrt[t]{M/C}$$

$$r = \sqrt[t]{M/C} - 1$$

il tempo è frazionato, nella ricerca del tempo può capitare di non avere piena corrispondenza nei risultati. Questo è dovuto all'approssimazione del montante e del calcolo logaritmico. Si possono adoperare anche i log decimali, anche se non ho ben capito perchè diano lo stesso risultato!

Figura 9 Formulario capitalizzazione composta

|    | A                             | B | C                                   | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S |
|----|-------------------------------|---|-------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Operazioni di prestito</b> |   | regime di capitalizzazione composta |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 18 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 19 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 21 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 22 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 23 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 24 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 25 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 26 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 27 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 28 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 29 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 30 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 31 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 32 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 33 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 34 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 35 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 36 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 37 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 38 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 39 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 40 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 41 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 42 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 43 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 44 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 45 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 46 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 47 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 48 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 49 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 50 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 51 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 52 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 53 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 54 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 55 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 56 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 57 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 58 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 59 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 60 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 61 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 62 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 63 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 64 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 65 |                               |   |                                     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

interesse composto  
 $M = C \cdot (1+i)^t$   
 formula base

dati

| M                      | C              | I  | r     | a | m | g |
|------------------------|----------------|----|-------|---|---|---|
| 184                    | 100            | 84 | 7,00% | ? | ? | ? |
| ricerca del montante   | non eseguibile |    |       |   |   |   |
| ricerca del capitale   | non eseguibile |    |       |   |   |   |
| ricerca dell'interesse | 84             |    |       |   |   |   |
| ricerca del tasso      | non eseguibile |    |       |   |   |   |
| ricerca del tempo      | 9,012381793    |    |       |   |   |   |
|                        |                |    |       | a | m | g |
|                        |                |    |       | 9 | 0 | 4 |

tempo 1  
 9,00  
 0,148582  
 4

## Capitalizzazione composta

Nel regime di capitalizzazione composta l'interesse prodotto in ogni periodo si somma al capitale e produce a sua volta interessi, di modo che il montante è calcolato con una formula dove il tempo è posto in esponente:  $M = C(1+r)^t$ , dove  $(1+r)^t$  è il fattore di capitalizzazione composta.

1° situazione: ricerca dell'Interesse e del Montante noti C, r, t

| M | C   | I | r  | a | m | g |
|---|-----|---|----|---|---|---|
| ? | 100 | ? | 7% | ? | ? | ? |

2° situazione: ricerca del Capitale C noti M, I, r, t

| M   | C | I  | r     | a | m | g |
|-----|---|----|-------|---|---|---|
| 184 | ? | 84 | 7,00% | 9 | 0 | 0 |

3° situazione: ricerca dell'Interesse I noti M, C, r, t

| M | C   | I | r     | a | m | g |
|---|-----|---|-------|---|---|---|
| ? | 100 | ? | 7,00% | 9 | 0 | 0 |

4° situazione: ricerca del tasso r noti M, C, I, t

| M   | C   | I  | r | a | m | g |
|-----|-----|----|---|---|---|---|
| 184 | 100 | 84 | ? | 9 | 0 | 0 |

5° situazione: ricerca del tempo t noti M, C, I, r

| M   | C   | I  | r     | a | m | g |
|-----|-----|----|-------|---|---|---|
| 184 | 100 | 84 | 7,00% | ? | ? | ? |

## Capitalizzazione composta

### M montante C capitale r tasso d'interesse t tempo

Nel regime di capitalizzazione composta l'interesse prodotto in ogni periodo si somma al capitale e produce a sua volta interessi, di modo che il montante è calcolato con una formula dove il tempo è posto in esponente:  $M = C(1+r)^t$ , dove  $(1+r)^t$  è il fattore di capitalizzazione composta.

$$M = C \cdot (1+r)^t$$

$$(1+r)^t = \frac{M}{C} \quad t \cdot \ln(1+r) = \ln(M) - \ln(C) \quad t = \frac{\ln M - \ln C}{\ln(1+r)}$$

$$C = \frac{M}{(1+r)^t}$$

$$C = M \cdot (1+r)^{-t}$$

$$M = C \cdot (1+r)^t \quad (1+r)^t = \frac{M}{C} \quad 1+r = \sqrt[t]{M/C}$$

$$r = \sqrt[t]{M/C} - 1$$

il tempo è frazionato, nella ricerca del tempo può capitare di non avere piena corrispondenza nei risultati. Questo è dovuto all'approssimazione del montante e del calcolo logaritmico. Si possono adoperare anche i log decimali, anche se non ho ben capito perchè diano lo stesso risultato!

Figura 10 Foglio.xlsx da \_E4\_MF\_01\_new



La capitalizzazione composta è matematicamente più impegnativa, ma con un po' di applicazione si riesce ad ottenere il risultato desiderato! Le approssimazioni sono diverse rispetto alla capitalizzazione semplice perché applichiamo i logaritmi e questo comporta sfasamenti.

Lo scopo principale è di proporre un'esercitazione sulle formule dirette e inverse. Nei fogli xlsx sono stati introdotti dei modelli che tramite l'uso della funzione SE possa soddisfare tutte le possibilità o situazioni.

## Sconto e Valore Attuale

Affrontando l'argomento sconto e/o valore attuale, si devono fare delle precisazioni e approfondimenti sulla natura delle parole e il loro preciso significato.

Con la capitalizzazione abbiamo visto che abbiamo due regimi:

1. Capitalizzazione semplice
2. Capitalizzazione composta.

In ogni caso abbiamo **il tempo** come fattore fondamentale. Nel nostro pensare comune il tempo scorre sempre verso il futuro e allora siamo nel regime di capitalizzazione, semplice o composta, ma possiamo sempre pensare ad un capitale futuro e avere bisogno di "attualizzarlo" cioè pensare al tempo all'indietro, un ritorno alle origini.

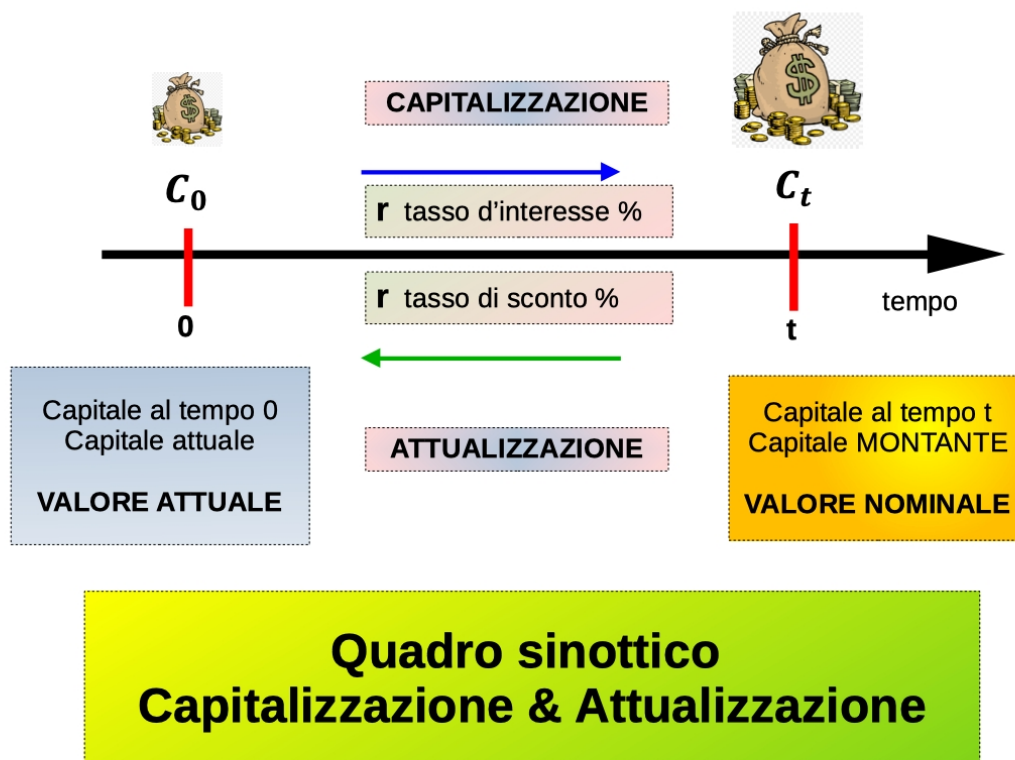


Figura 11 Quadro sinottico

# Calcolare il valore attuale di un capitale esigibile tra "n" anni

Per le decisioni finanziarie occorre spesso combinare flussi di cassa o mettere a confronto valori aventi manifestazioni temporali diverse. Per "spostarli indietro nel tempo" al fine di trovare il corrispondente odierno loro valore, occorre attualizzarli scontandoli. Noto il tasso di interessi, il capitale finale, il periodo di riferimento, con le opportune formule si attualizza un valore monetario temporalmente diverso.

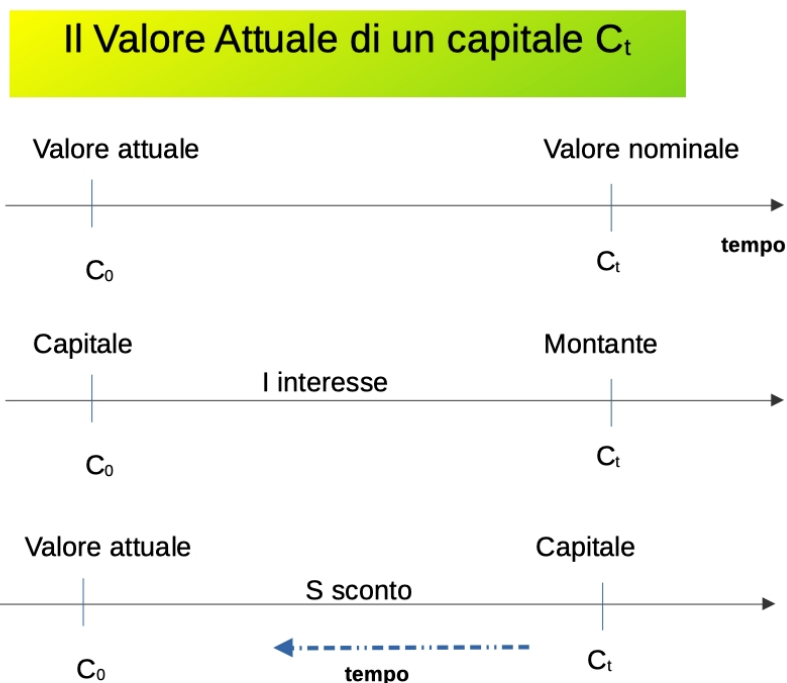


Figura 12 confronto tra il Valore Nominale e il Valore attuale

La definizione è astrusa, ovvero di non facile comprensione perché considera il tempo "all'indietro". Propongo due situazioni:

- 1) Deposito un capitale  $C_0$  in banca e dopo un certo tempo  $t$ , al tasso d'interesse  $r$  del 6% ottengo un capitale  $C_t$  che viene anche chiamato  $M$  montante.
  - a)  $C_0=100$   $r=6\%$   $t=4$  mesi che trasformati in frazione di anno  $4/12=1/3$
  - b)  $I=C_0*r*t$   $I=100*0,06*1/3$   $I=2$   $M=C_t=100+2=102$
- 2) Ho un capitale  $C_t$  datomi in prestito e che devo restituire in un dato periodo, lo restituisco con un anticipo di 4 mesi, il tasso  $r$  è del 4%: qual è il  $C_0$  o il suo Valore Attuale.
  - a) Per questa mia operazione ottengo uno sconto  $S=C_t*r*t$  e ho quindi un  $VA=C_0=C_t-S$
  - b)  $C_t=510$   $r=4\%$  4 mesi che trasformati in frazione di anno  $4/12=1/3$
  - c)  $S=510*0,04*1/3$   $S=6,8$   $VA=C_0=510-6,8=503,2$

**Lo sconto S si ha per il pagamento di un prestito o una cambiale anticipata, si parla di mesi o giorni che sono periodi inferiori all'anno.**

Esempio:

Una cambiale  $C_t$  di 350,00 € è stata scontata in banca con uno sconto commerciale del 3,5% (r tasso d'interesse). Il suo Valore Attuale è di  $C_0$  339,50€.

Quando scadeva? Trovare il tempo  $t$  che rappresenta il processo di attualizzazione. *In finanza il termine attualizzazione indica il processo finanziario che consente di stabilire oggi il valore attuale di un capitale che ha come naturale scadenza una data futura.*

$$S = C_t \cdot r \cdot t$$

$$VA = C_0 = C_t - S \quad S = 350,00 - 339,50 = 10,50 \text{ €}$$

$$S = C_t \cdot r \cdot t \quad t = \frac{S}{C_t \cdot r} \quad t = \frac{10,50}{350,00 \cdot 0,035} = 0,858 \text{ anni}$$

$$0,858 \cdot 12 = 10,296 \text{ mesi} \quad 0,296 \cdot 30 = 8,88 \text{ giorni} \quad t = 10 \text{ mesi e } 9 \text{ giorni}$$

Questo lo possiamo considerare un "processo inverso", proviamo a fare il processo diretto adoperando le stesse cifre.

Esempio:

Abbiamo un deposito  $C_0$  di 339,50 € al tasso d'interesse del 3,5% impiegato per un tempo di 10 mesi e 9 giorni. Calcoliamo l'Interesse e il Montante o  $C_t$ .

$$I = C_0 \cdot r \cdot t$$

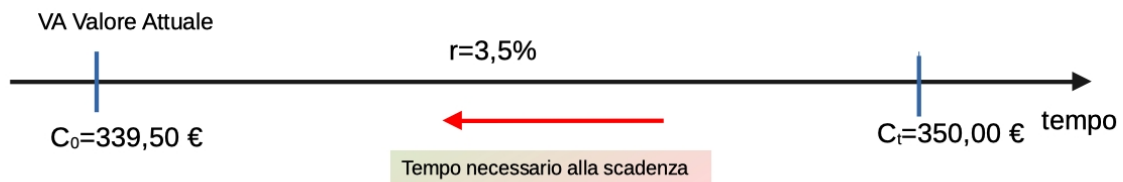
$$M = C_t = C_0 + I$$

$$t = \frac{10}{12} + \frac{9}{30} = 1 + \frac{2}{15} \quad I = 339,50 \cdot 0,035 \cdot \left(1 + \frac{2}{15}\right) = 13,42 \text{ €}$$

$$M = C_t = 339,50 + 13,42 \cong 350,00 \text{ €}$$

Ho adoperato le frazioni e non i decimali perché ci sono meno errori sugli arrotondamenti e favorisce la comprensione del tempo frazionato.

Una cambiale di € 350 è stata scontata in banca con uno sconto commerciale del 3,5% (tasso d'interesse  $r$ ). Il suo valore attuale è di € 339,50. Quando scadeva?



$$S = C_t \cdot r \cdot t$$

**Valore attuale**

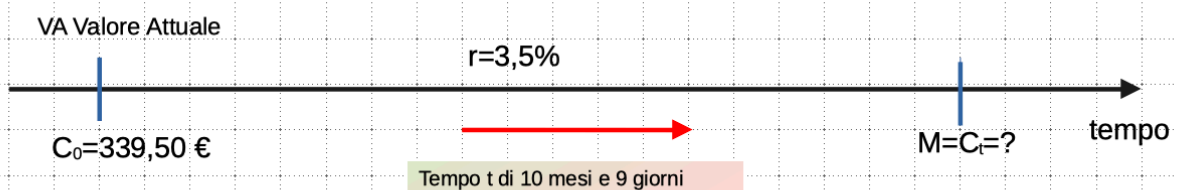
$$VA = C_0 = C_t - S \quad S = 350,00 - 339,50 = 10,50 \text{ €}$$

$$S = C_t \cdot r \cdot t \quad t = \frac{S}{C_t \cdot r} \quad t = \frac{10,50}{350,00 \cdot 0,035} = 0,858 \text{ anni}$$

$$0,858 \cdot 12 = 10,296 \text{ mesi} \quad 0,296 \cdot 30 = 8,88 \text{ giorni} \quad t = 10 \text{ mesi e } 9 \text{ giorni}$$

Figura 13 Valore Attuale

Ho un deposito  $C_0$  di € 339,50 impiegato al tasso di interesse  $r$  di 3,5% per un tempo  $t$  di 10 mesi e 9 giorni. Calcolare l'Interesse e il Montante.



$$I = C_0 \cdot r \cdot t$$

$$M = C_t = C_0 + I$$

$$t = \frac{10}{12} + \frac{9}{30} = 1 + \frac{2}{15} \quad I = 339,50 \cdot 0,035 \cdot \left(1 + \frac{2}{15}\right) = 13,42 \text{ €}$$

$$M = C_t = 339,50 + 13,42 \cong 350,00 \text{ €}$$

**Montante**

Figura 14 Montante

Facciamo un altro esempio, per abituarci al linguaggio finanziario.

Una cambiale  $C_t$  di 4.500€ viene pagata con 60 giorni di anticipo. Il tasso d'interesse o di sconto è di 6,25%. Per questo buon operare l'utente riceverà uno sconto: qual è la somma  $C_0$  pagata finale?

$$C_t = 4.500\text{€} \quad r = 0,0625 \quad t = (60/30)/12 = 1/6$$

$$S = 4500 * 0,0625 * 1/6 = 46,88\text{€} \quad C_0 = C_t - S = 4500 - 46,88 = 4453,12\text{€}$$

## Il fattore temporale: attualizzazione e capitalizzazione

Il fattore temporale assume notevole rilievo in campo economico sia per quanto riguarda il passato che per il futuro. Infatti,

1. le dinamiche inflazionistiche portano a continua erosione del potere d'acquisto delle monete, per cui poter disporre di dati parametrati a queste dinamiche è un'esigenza spesso avvertita dagli economisti ma anche tutti noi per necessità pratiche,
2. senza poi contare che gli analisti finanziari fanno le loro valutazioni basandosi spesso sull'attualizzazione dei flussi monetari delle aziende nelle loro sue fasi evolutive o di stabilizzazione.

Per quanto riguarda la proiezione futura del valore del denaro, possiamo fare una semplice considerazione:

1. un euro disponibile oggi,
2. ha un valore effettivo maggiore del valore dello stesso disponibile tra qualche anno,
3. semplicemente perché quell'euro, oggi può essere investito e può generare nel frattempo degli interessi.

Infatti (in linea generale) un capitale impiegato ad un tasso di attualizzazione  $r$  per  $n$  anni, genera un capitale "finale" (detto montante) che sarà maggiore del capitale iniziale. L'attualizzazione di cui ci occupiamo consiste nel trovare l'equivalenza in termini reali di due capitali "uguali" che hanno scadenze diverse nel tempo: o dello stesso capitale in tempi diversi, il che è lo stesso. Più precisamente: conoscendo un determinato capitale "finale", il tasso di attualizzazione  $r$ , il tempo di

riferimento  $t$ , applicando le opportune formule si identifica il suo attuale valore (**VA**).

- Quindi, in questo contesto i termini "attuale" e "attualizzazione" hanno a che fare con l'idea di un capitale "portato indietro" nel tempo.
- mentre il termine capitalizzazione s'identifica col "portare in avanti nel tempo" il valore reale di un determinato capitale.

Mediante l'attualizzazione (ovviamente nell'ipotesi di un tasso di remunerazione del capitale positivo), spostando un capitale "all'indietro nel tempo" lo si va a "scontare": non a caso si dice spesso che il valore attuale è pari al valore suo finale "scontato".

## Tempo, convenienza, rischi finanziari

Sia in ambito aziendale che sui mercati dei capitali le operazioni finanziarie tengono in considerazione soprattutto alcuni elementi: i principali sono quelli legati al tempo ed al rischio. Ma anche alla razionalità nel caso degli investitori razionali, ovvero quelli che cercano il rendimento più conveniente col minor rischio possibile.

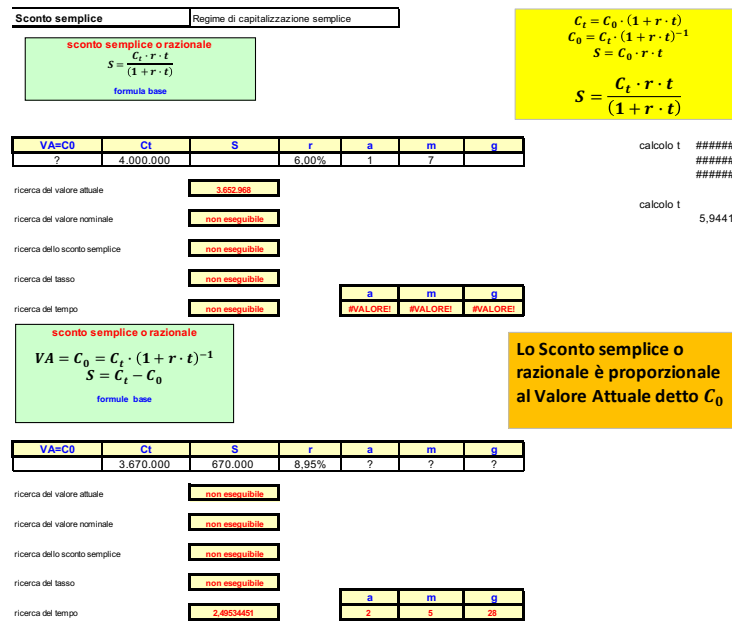
**Tempo.** Come abbiamo già detto parlando del tempo, un euro di oggi vale di più di un euro di domani, perché il primo può essere investito e fruttare un interesse (tasso di rendimento).

90\_comm

E4\_mf\_02

14

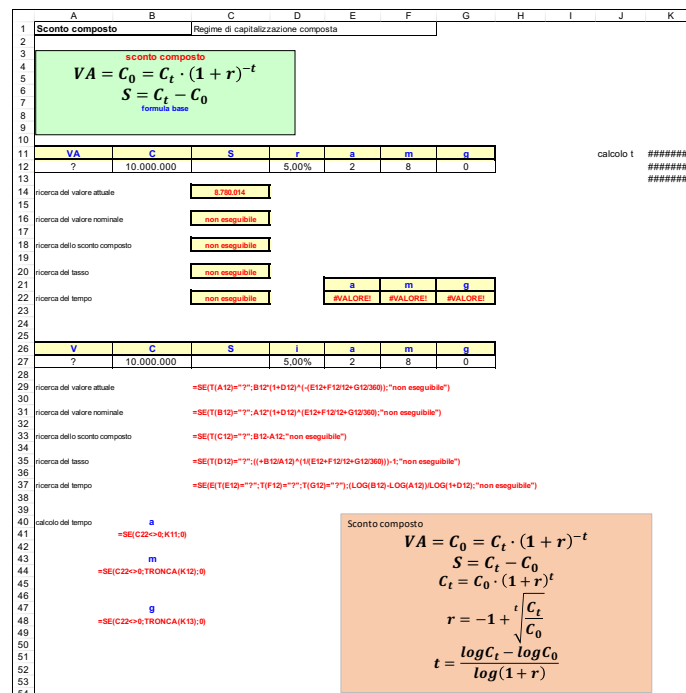
sc\_sem



E4\_mf\_02

Figura 16 Sconto semplice

sc\_composto



E4\_mf\_02

Figura 17 sconto composto