MOMENTI IMPORTANTI

Aristotele V/F categorie
Fibonacci 0 s.decimale
Leibniz 0,1 s.binario

$$A \oplus A = A$$

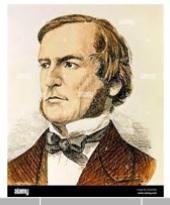
Babbage HW Analitycal Engine
Lovelace SW Numeri di Bernouilli

Boole AND OR NOT
Logica proposizionale

$$X \cdot X = X$$





	nascita	morte	età	
Aristotele	383	322	61	a.c.
Fibonacci	1170	1242	72	
Leibniz	1646	1716	70	
Babbage	1791	1871	80	
Lovelace	1815	1852	37	
Boole	1815	1864	49	
Shannon	1916	2001	85	
Turing	1912	1954	42	

2.276	Aristotele-Turing
1.553	Aristotele-Fibonacci
476	Leibniz-Fibonacci
145	Babbage-Leibniz
169	Lovelace-Leibniz
169	Boole-Leibniz
101	Shannon-Boole
97	Turing-Boole

Scansione temporale

Età dei principali protagonisti dell'era informatica

PERSONAGGI

Shannon
Boolean algebra
Switching circuits

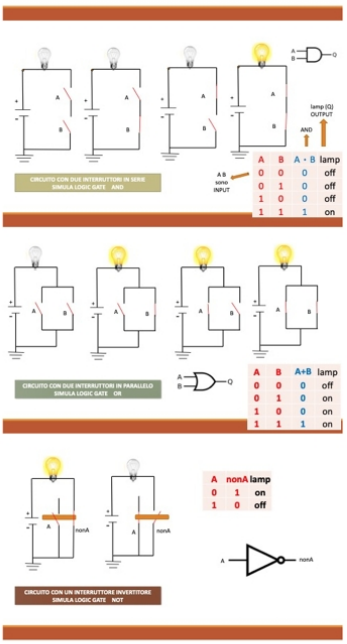
Turing
Macchina di Turing

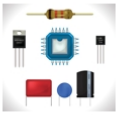

George Boole
Logic + algebra ⟹ Boolean algebra
AND OR NOT
Il passaggio dal decimale al binario

$$X \cdot X = X$$

HW & SW
Charles Babbage & Ada Lovelace

ADA





Momento Tecnologico
I transistor

Key word

Algoritmo
Programma
Calcolabilità
Bit & BYTE
AND OR NOT
HW e SW
Logic Gates
Algebra Boolean
Logica combinatoria

Claude Elwood Shannon
Logic Gates
Boolean algebra & Switching circuits

LOGIC

I bit & Byte

Introduzione

Questa è una appendice dove viene trattato l'argomento bit e BYTE e la loro matematica o meglio aritmetica. Il problema è sempre stato creare un meccanismo, una macchina che potesse eseguire automaticamente i calcoli. Il passaggio dalle macchine calcolatrici ai moderni computer è una storia affascinante con sviluppi davvero sorprendenti.
Storicamente la prima calcolatrice fu la pascalina, macchina inventata da Blaise Pascal, effettuava somme e sottrazioni in base a rotismi vari.

Figura 1 La pascalina

La pascalina è lo strumento di calcolo precursore della moderna calcolatrice. Fu inventata nel 1642 dal matematico e filosofo francese Blaise Pascal, da cui prese il nome. Lo strumento consente di addizionare e sottrarre numeri composti da un massimo di dodici cifre, operando automaticamente i riporti.

La macchina calcolatrice di Leibniz, altro grande filosofo e matematico, invece eseguiva tutte e quattro le operazioni.

Figura 2 La macchina di Leibniz

La calcolatrice di Leibniz è stata la prima calcolatrice meccanica della storia in grado di eseguire le quattro operazioni matematiche. Fu ideata intorno al 1672 dal matematico e filosofo tedesco Gottfried Wilhelm von Leibniz, ma il progetto venne ultimato solo nel 1694.
La calcolatrice *di Leibniz* (in inglese Stepped Reckoner) è stata la prima calcolatrice meccanica della storia in grado *di* eseguire le quattro operazioni...

I bit & BYTE

La materia prima dei computer sono i bit, contrazione delle parole Binar Digit (cifra binaria):

0 1

Il sistema numerico binario è utilizzato perché l'elettricità ha due stati: ON (acceso) OFF (spento).
Un singolo segnale elettrico può essere attivo ON o non attivo OFF.
Le "parole" che il computer adopera sono i Byte che sono stringhe di otto bit. La prima domanda che possiamo porci è:

i bit quante disposizioni con ripetizioni possiamo avere?

$$D_n^k = D_2^8 = 2^8 = 256$$

Dove **n** è il numero degli oggetti e **k** il numero dei posti.
Ricapitolando:

1. Adoperiamo un sistema duale, binario, 0 e 1
2. Con questo sistema numerico gestiamo i segnali elettrici i cui stati sono due ON OFF
3. Le parole o WORD del computer sono i BYTE, una serie di otto bit con ripetizioni che danno la possibilità di 256 caratteri.

Questa è la base di calcolo di ogni PC! Vediamo con quali metodi e artefici possiamo manipolare i bit! Possono eseguire le quattro operazioni? E se del caso, la manipolazione dei BYTE[1] come possiamo far interpretare al computer le WORD in un linguaggio da noi comprensibile.

[1] Le parole **bit** e **BYTE** sono scritte rispettivamente in minuscolo e maiuscolo. Il BYTE è anche chiamato la WORD (parola) con la quale il computer comunica.

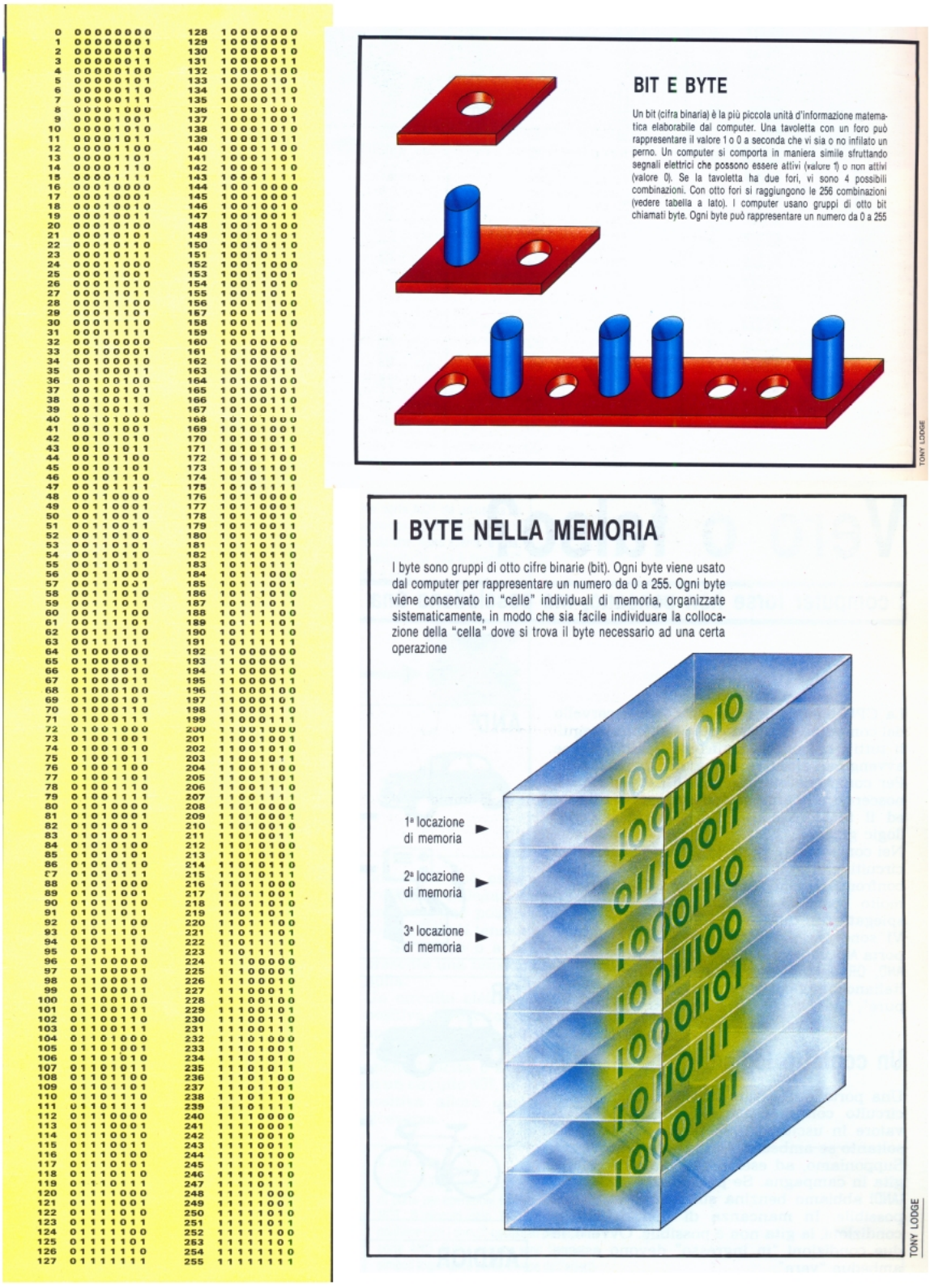


Figura 3 bit & BYTE

Le Logic Gates

Prima di vedere quali sono gli strumenti matematici di un computer, facciamo un riepilogo sulle Logic Gates. Il padre teorico fu George Boole che formalizzò matematicamente la logica aristotelica, creando la "Boolean algebra" che prevedeva l'introduzione dei connettivi logici:

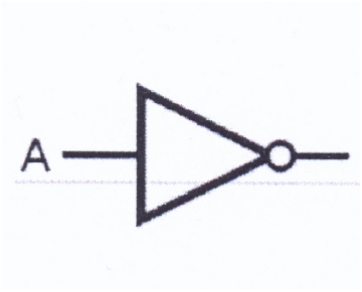
AND (congiunzione) OR (disgiunzione) NOT (negazione)

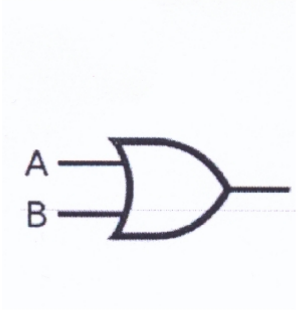
AND; OR sono due connettivi biargomentali, mentre NOT è mono argomentale.
Dopo l'introduzione dell'algebra Booleana fu Claude Elwood Shannon, ottanta anni dopo, che la applicò ai circuiti elettrici costruendo le prime Logic Gates, diventando il padre dell'informatica moderna.

Una porta (gate) logica è un dispositivo che svolge una funzione booleana, un'operazione logica eseguita su uno o più ingressi binari che produce un singolo output binario.

Porta NOT
Entra un segnale, esce il suo contrario.

NOT		
	A	nonA
	0	1
	1	0





Porta OR
È una disgiunzione
Entrano due segnali

OR			
	A	B	S
	0	0	0
	1	0	1
	0	1	1
	1	1	1

AND			
	A	B	S
	0	0	0
	1	0	0
	0	1	0
	1	1	1

Porta AND
È una congiunzione
Entrano due segnali

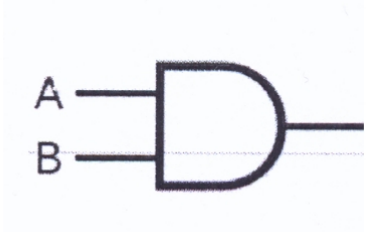


Figura 4 Le tre logic gates fondamentali

Con le combinazioni di queste tre porte si possono costruire altre porte logiche, di seguito:

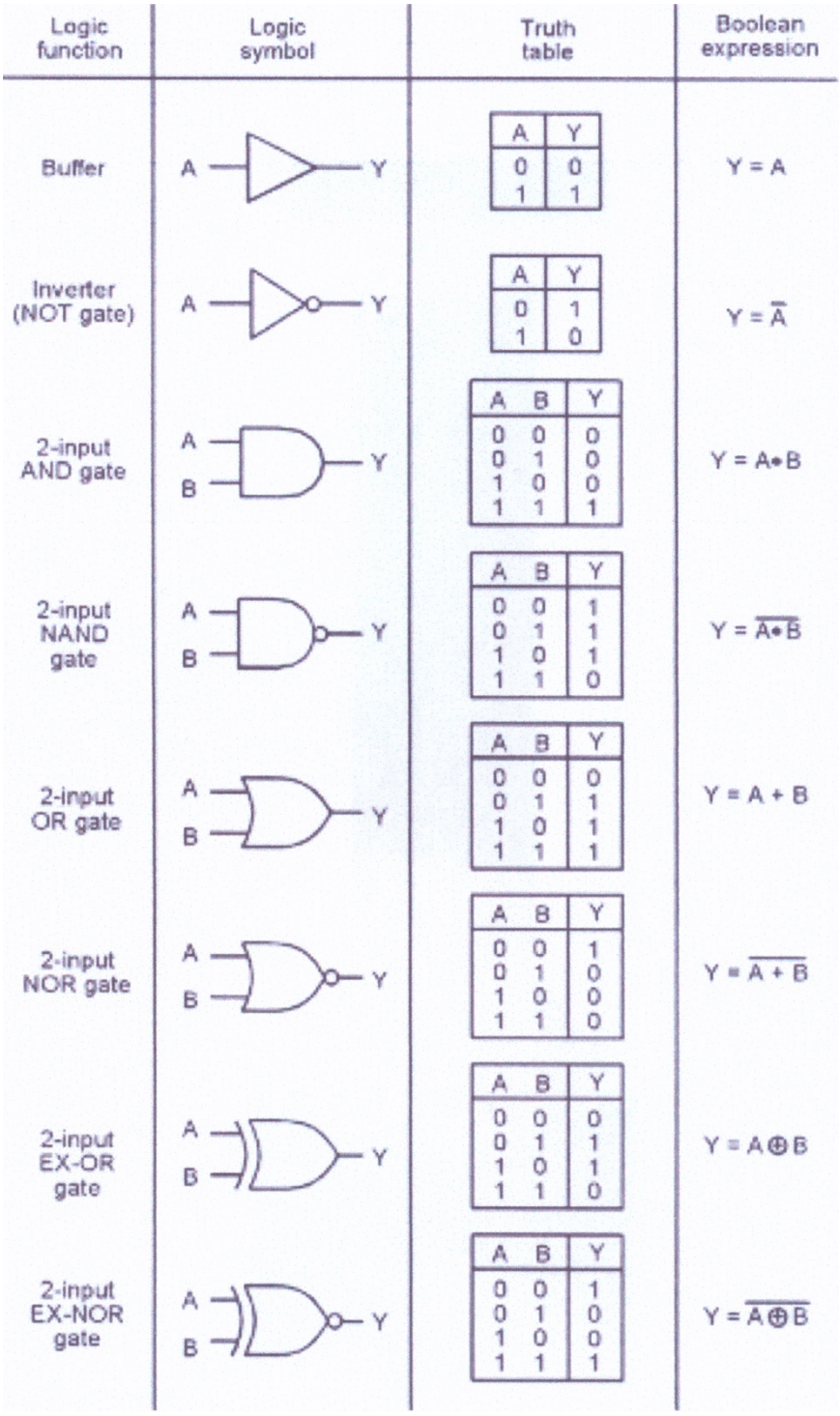


Figura 5 Le Logic Gates

Questo è un elenco delle porte logiche usate principalmente nei circuiti elettronici. Vi sono riportate anche le notazioni booleane.

La porta NAND, detta anche negazione congiunta, è una porta AND e alla sua uscita è collegata una porta NOT. Il risultato è che la tavola delle verità è quella riportata, nella quale solo con due segnali positivi si ottiene lo 0.

La porta, disgiunzione inclusiva detta oppure dal **vel** latino, permette la costruzione di altre due porte: NOR (OR con negazione NOT) e XOR.

La porta XOR detta disgiunzione esclusiva **aut aut** (o fai questo o fai altro) è una porta importante per la nostra trattazione: osservate la tavola di verità.

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TAVOLA delle VERITA' di XOR

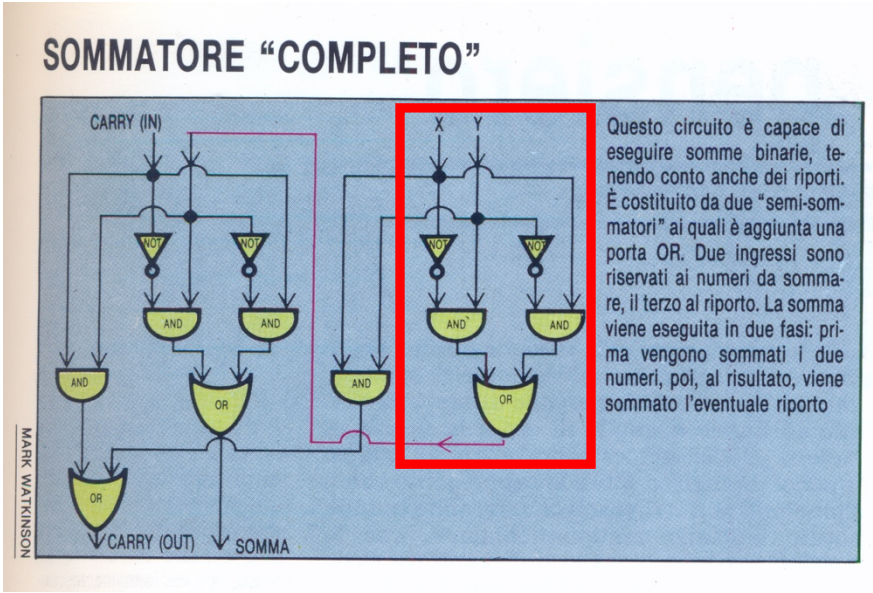
Proviamo a sommare due numeri binari, 0 e 1, e osservare i casi che si possono avere.

$$0 + 0 = 0$$
$$1 + 0 = 1$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 = 0\ carry\ 1$$

Tabella delle somme aritmetiche possibili con 0 1

Le regole dell'aritmetica sono sempre le stesse. I primi tre passaggi sono intuitivi, il problema arriva quando effettuiamo la somma 1+1 che offre come risultato 10, quindi scrivo 0 e riporto (carry) 1.

Come possiamo fare eseguire queste somme al computer e come possiamo gestire il carry? La figura sottostante mi offre un sommatore completo con l'utilizzo delle tre porte logiche.

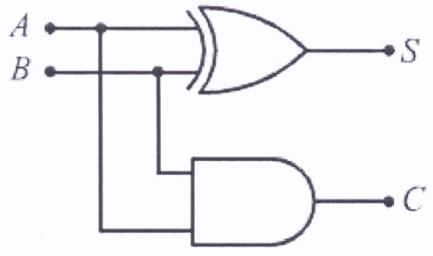


Nel riquadro rosso ho evidenziato una porta XOR, che è la porta che simula i risultati delle somme di 0 1. X e Y sono i due numeri che introduciamo esempio:
X =1 Y=1
SOMMA = 0
CARRY (out) 1

Risultato finale 1+1=10

Figura 6 Sommatore completo

Lo schema semplificato di un half-adder o semi sommatore è visualizzato nella figura nella quale compare una porta XOR che esegue tutte le somme e per il carry utilizziamo una porta AND che fornisce il famoso riporto quando i due segnali sono positivi.



A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Figura 7 Half-Adder porta XOR e porta AND per il carry

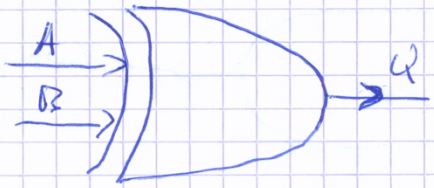
Di seguito presento alcune pagine dattiloscritte.
Inizio con la spiegazione della porta XOR.

La porta XOR disgiunzione esclusiva (aut aut)

$A \oplus B$

$A \veebar B$

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Half adder o semisommatore

Operazioni di somma con i numeri binari:

$0 + 0 = 0$

$1 + 0 = 1$

$0 + 1 = 1$

$1 + 1 = 0$ carry 1

Come si vede corrisponde ad una porta XOR

$Q = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$

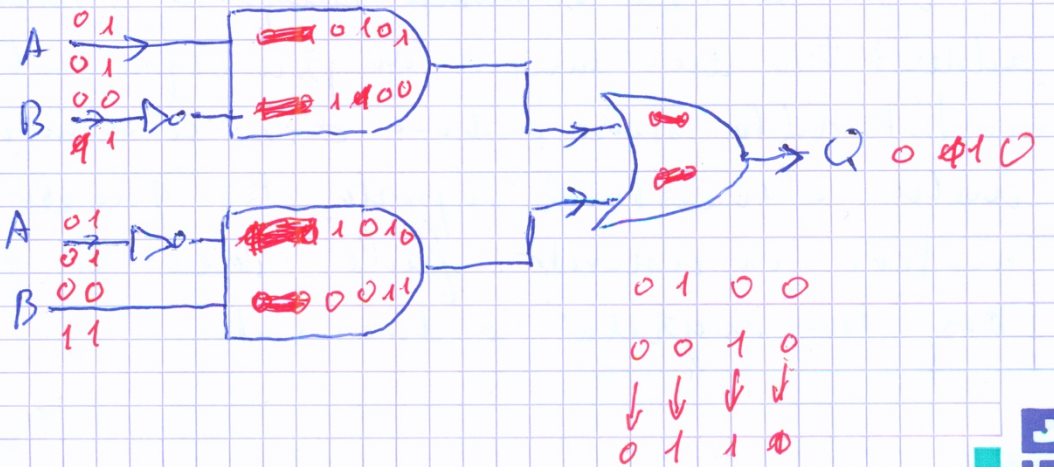


Figura 8 porta XOR

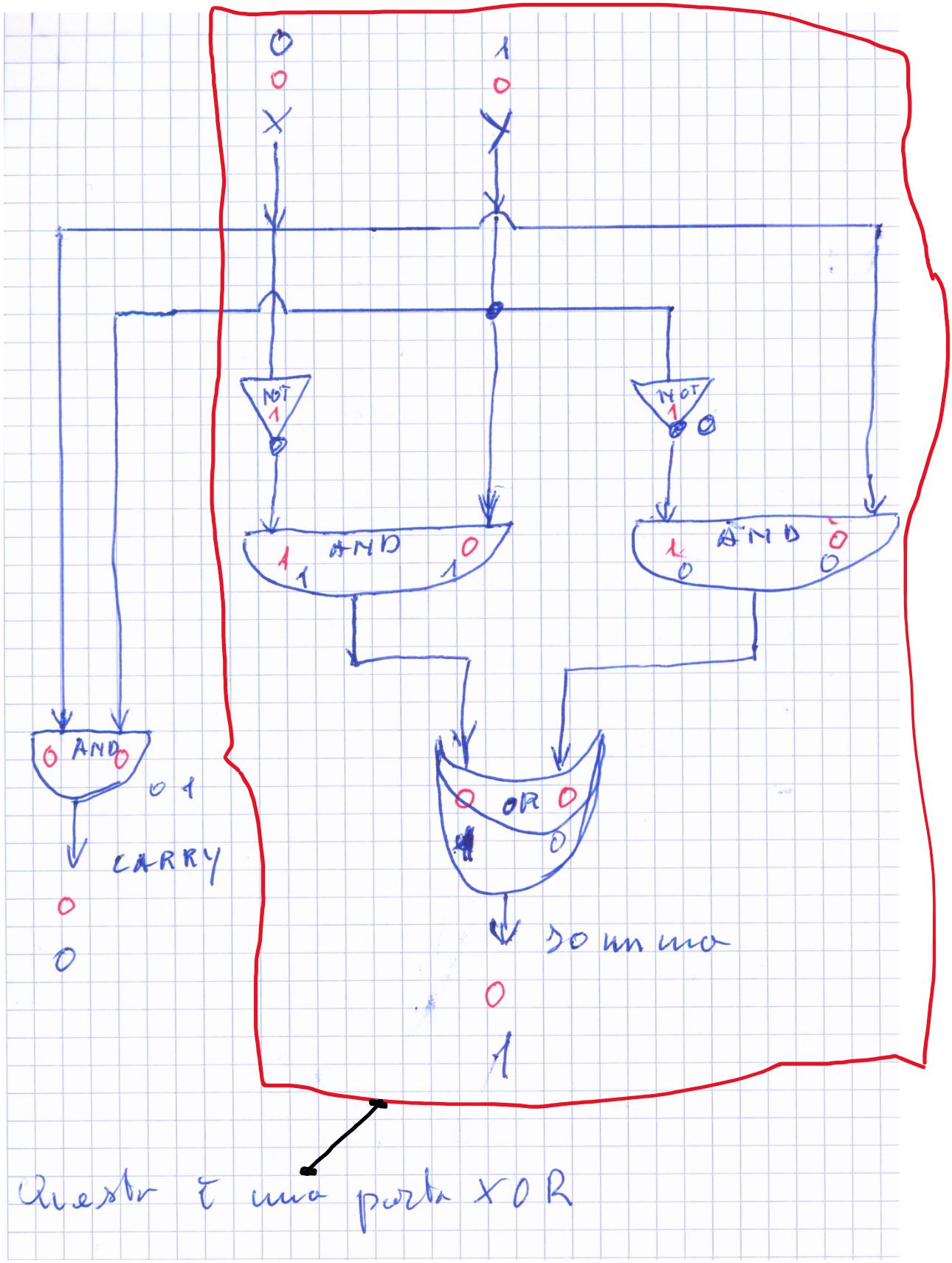
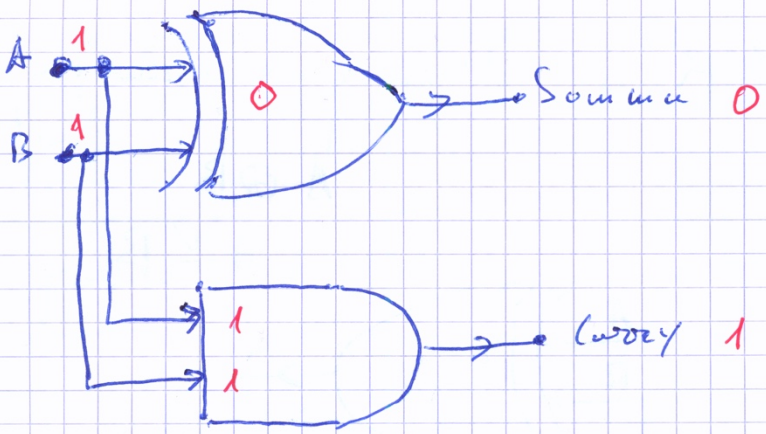
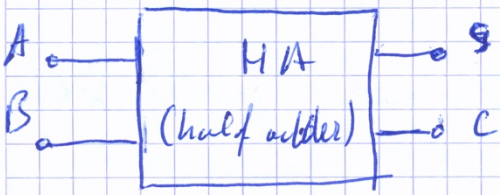


Figura 9 half-adder dattiloscritto con carry



A	B	S	C
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

Questo è l'Half Adder



$S = A \oplus B$

$C = A \cdot B$

Per ottenere la somma completa (full adder) tra due numeri di più cifre, oltre ai bit dello stesso ordine occorre sommare anche l'eventuale riporto. Per questo motivo il circuito full adder si presenta con tre ingressi e due uscite

Figura 10 full adder

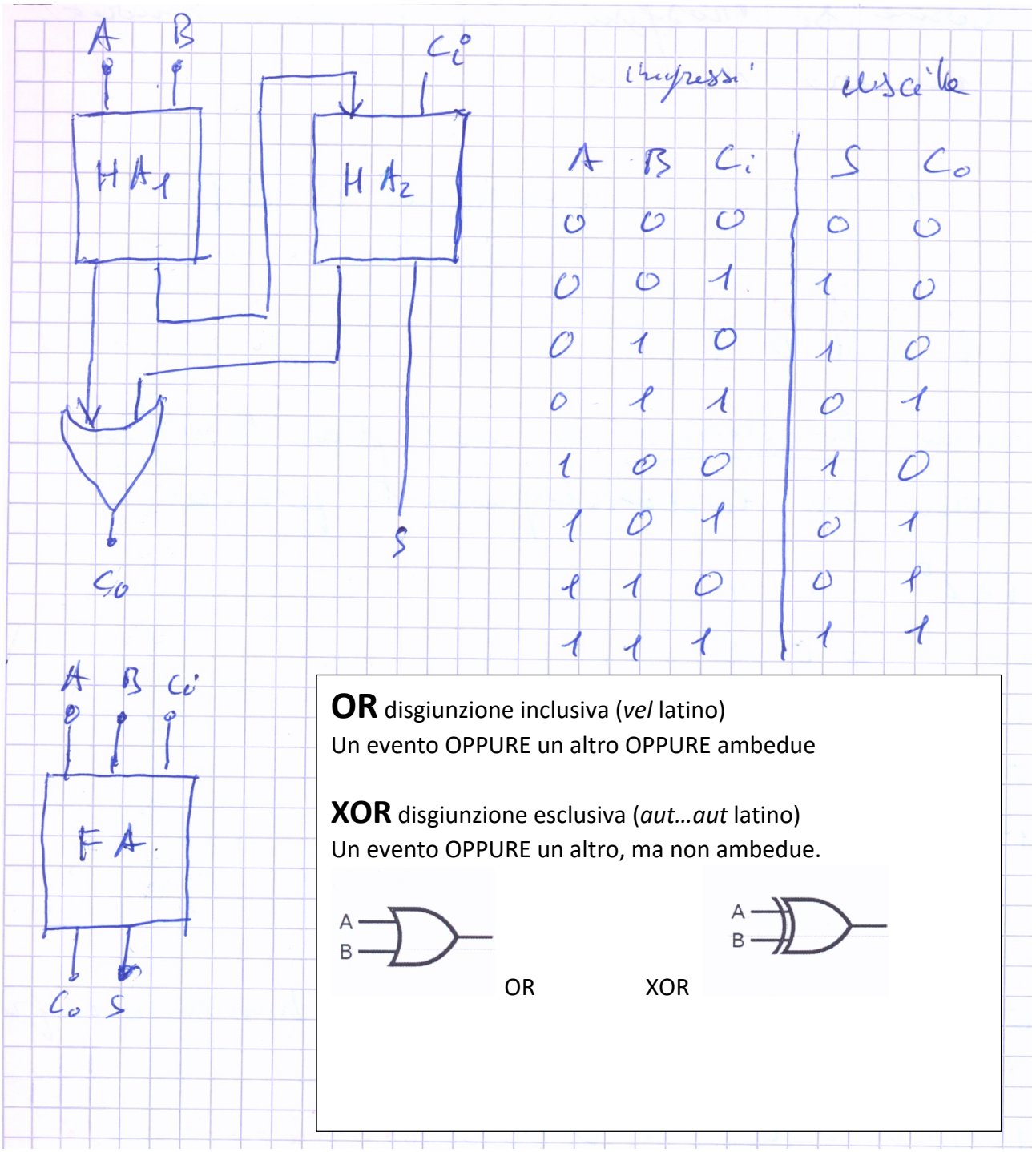


Figura 11 Più sommatori

Abbiamo visto che utilizzando le Logic Gates è possibile eseguire l'operazione di somma con i numeri binari: li possiamo manipolare!

Benché i computer siano in grado tutte le funzioni aritmetiche, la circuiteria interna è in realtà capace di fare solo le somme. Tutte le altre operazioni si ottengono mediante ingegnose combinazioni di porte logiche (i sommatori) e di funzioni controllate da SW.

Come avete potuto notare basta poco per complicare i circuiti, ma il pericolo più grande che può condurre o errore è la RIDONDANZA dei numeri binari e avere circuiti molto complicati da implementare nei CHIP.
L'ingegnere Informatico Maurice Karnaugh è colui che ha introdotto le cosiddette mappe di Karnaugh per aiutarci a risolvere questo problema.
Laureato all'università Yale nel 1952, fu governatore emerito dell'ICCC (International Council for Computer Communication). Lavorò come ricercatore ai Laboratori Bell dal 1952 al 1966 e al centro di ricerca IBM dal 1966 al 1993. Insegnò inoltre informatica al Politecnico della New York University dal 1980 al 1999, e dal 1975 alla morte è stato membro dell'IEEE per i suoi lavori sull'utilizzo di tecniche numeriche nelle telecomunicazioni.
Le mappe di Karnaugh essendo complicate sia come argomento, si può fare ricorso anche a pagine dattiloscritte.

Figura 12 Nativi americani

Le mappe di Karnaugh

Le mappe di Karnaugh sono di una importanza cruciale per la progettazione e la sintesi delle reti logiche. In sostanza sono uno strumento grafico che ci aiuta nella semplificazione delle espressioni booleane, senza addentrarci nell'algebra booleana che è di per sé abbastanza ostica e complicata.

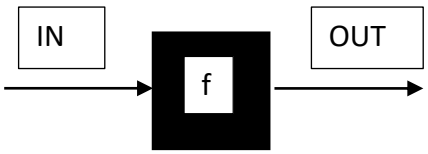
Funzione booleana

Iniziamo con il definire una funzione booleana.

È una funzione che associa bit a bit.

In matematica e in informatica, una funzione booleana a n variabili è una funzione f=f(x,y,z…) con x,y,z… variabili indipendenti, f variabile dipendente, si dice ***booleana*** *di variabili* ***booleane*** *se e solo se ciascuna delle variabili indipendenti può avere solo valore 0 o 1, quindi ha un dominio {0;1} e la variabile dipendente può anch'essa avere solo valore 0 o 1.*

La funzione può essere vista come una black-box dove entra un INPUT che viene elaborato e sforna un OUTPUT, le mappe semplificano il lavoro all'interno della black-box.



Supponiamo di avere una funzione f a 3 variabili x, y, z.
La rappresentazione in forma tabulare, cioè tutti i casi possibili che sono otto, i risultati sono stati ipotizzati a caso.

$$2^3 = 8$$

	IN			OUT	
	x	y	z	f(xyz)	
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	
3	0	1	0	1	3
4	0	1	1	1	4
5	1	0	0	1	5
6	1	0	1	0	
7	1	1	0	0	
8	1	1	1	1	8

In questa rappresentazione tabulare sono rappresentati tutti casi possibili di combinazione delle variabili booleane con a fianco i risultati della funzione f(xyz). Questa può essere rappresentata in forma SP, dove S e P stanno per Somme e Prodotti. Si procede considerando tutti casi nei quali la funzione assume il valore 1. Questi casi riguardano le righe:

1 3 4 5 8

1	$\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}$		f vale 1, xyz sono segnate negate perché IN (0,0,0)
3	$\bar{x}\ y\ \bar{z}$		f vale 1, x e z negate IN (0,1,0)
4	$\bar{x}\ y\ z$		f vale 1, con x negata IN (0,1,1)
5	$x\ \bar{y}\ z$		f vale 1, con y negata IN (1,0,1)
8	$x\ y\ z$		f vale 1 con IN (1,1,1)

Le variabili IN hanno come valore 0 si indicano segnate, mentre le variabili IN con 1 si scrivono normalmente. Alla fine la funzione diventa questa espressione analitica:

$$f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,z$$

Il segno (sottointeso è una moltiplicazione) tra le variabili è identificato come un prodotto (porta AND), il segno + è quello della disgiunzione inclusiva (porta OR). Il valore, come sappiamo, della **f** scritta nella forma **SP** (Somme Prodotti): è **1**!

Per il teorema della dualità, se si vuole analizzare anche il caso per il quale f=0, basta realizzare lo stesso processo visto sopra, sostituire gli IN nei quali f=0. La funzione espressa nella forma SP è analoga a quella scritta per il caso di f=1.

Per il momento non interessa e restiamo nel caso nel quale f=1.

L'espressione analitica è chiaramente rindondante e siamo solo a una funzione a otto bit. È necessario semplificare: lo si può fare con le mappe di Karnaugh.

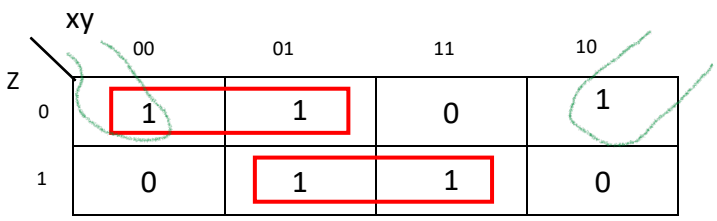
Lavorando con una funzione a tre variabili otteniamo otto possibili combinazioni dette K3.

$$(KN) \rightarrow 2^N \ nella\ forma\ generale$$

Nel nostro caso:

$$2^3 = 8\ \ che\ si\ definisce\ come\ (K3)$$

Si disegna un rettangolo con otto riquadri dove inserire gli **IMPLICANTI**, cioè i risultati della f.



1 riquadro xyz 000→**1**

2 riquadro xyz 010→**1**

3 riquadro xyz 110→0

4 riquadro xyz 100→**1**

5 riquadro xyz 001→0

6 riquadro xyz 011→**1**

7 riquadro xyz 111→**1**

8 riquadro xyz 101→0

L'ordine delle caselle non è lo stesso della forma tabulare, si chiama codifica di Gray.

Alla base delle mappe di Karnaugh ci sono tre concetti, tutti basati sul raggruppamento di 1.

1. **I raggruppamenti devono essere potenze di due, si possono fare raggruppamenti 2 a 2, 4 a 4 ecc.**
2. **Copertura della f , devo coprire tutti gli uno.**
3. **GL concetto di adiacenza (Geometrico Logico) due caselle si dicono adiacenti se hanno un lato in comune**

Nel nostro caso abbiamo due raggruppamenti di due coppie di 1 segnati con un rettangolo rosso. Per l'1 dell'ultima casella si adopera il principio dell'adiacenza come se il rettangolo fosse pieghevole e quindi adiacente all'1 della prima casella. L'adiacenza è segnalata con dei lazos verdi. In questo caso varia solo la y.

1° Riquadro rosso

$$\underset{000}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}} + \underset{010}{\bar{x}\,y\,\bar{z}} = \bar{x}\,\bar{z}\,(\bar{y} + y) = \bar{x}\,\bar{z}$$

Questo è il risultato del primo IMPLICANTE. Da due *minitermini* composti da tre valori di bit ne otteniamo solo uno composto da due valori di bit.

2° Riquadro rosso

$$\underset{011}{\bar{x}\,y\,z} + \underset{111}{x\,y\,z} = yz\,(\bar{x} + x) = yz$$

Questo è il risultato del secondo IMPLICANTE. Come sopra, in questo caso varia solo la x.

3° Adiacenza tra l'ultimo 1 e il primo 1 segnati dai lazos.

$$\underset{000}{\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}} + \underset{100}{x\,\bar{y}\,\bar{z}} = \bar{y}\,\bar{z}\,(\bar{x} + x) = \bar{y}\,\bar{z}$$

Questo è il risultato dell'adiacenza. Come sopra, varia solo la x.

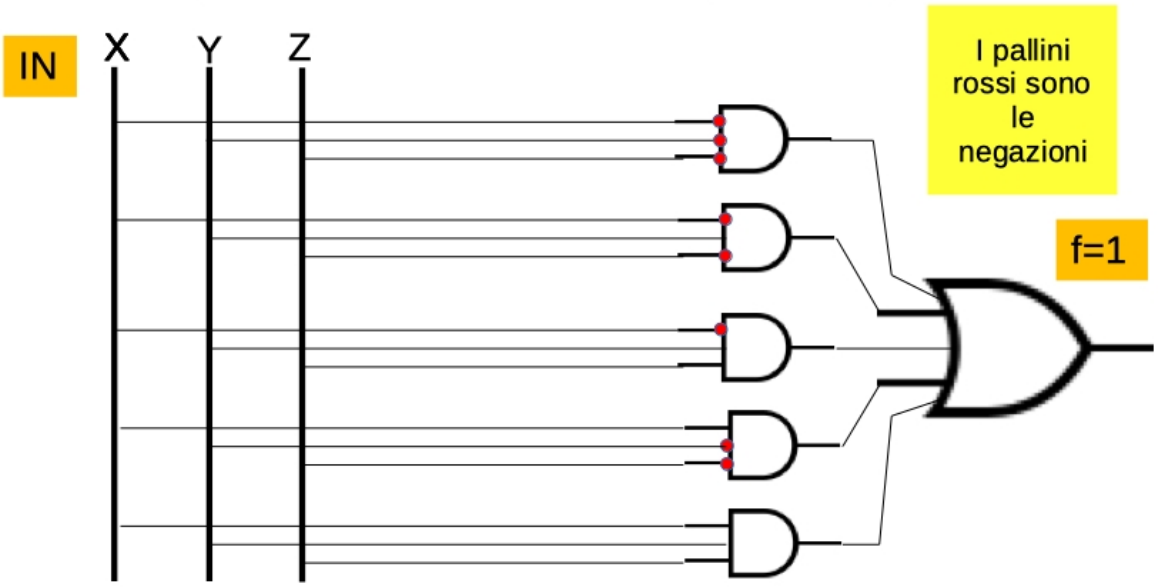
Questo metodo si chiama riduzione alla Robinson e la f che otteniamo è la seguente:

$$f(xyz) = \bar{x}\,\bar{z} + yz + \bar{y}\,\bar{z}$$

Costruiamo i circuiti relativi alle due forme di f realizzate: si nota subito la semplificazione ottenuta nel realizzare i circuiti.

$$f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,z$$

	IN			OUT	
	x	y	z	f(xyz)	
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	
3	0	1	0	1	3
4	0	1	1	1	4
5	1	0	0	1	5
6	1	0	1	0	
7	1	1	0	0	
8	1	1	1	1	8



La funzione è rappresentata da 5 minitermini che danno come risultato 1. Questa rappresentazione è la forma SP, Somme Prodotti. I prodotti sotto intesi, sono porte AND le somme sono porte OR.

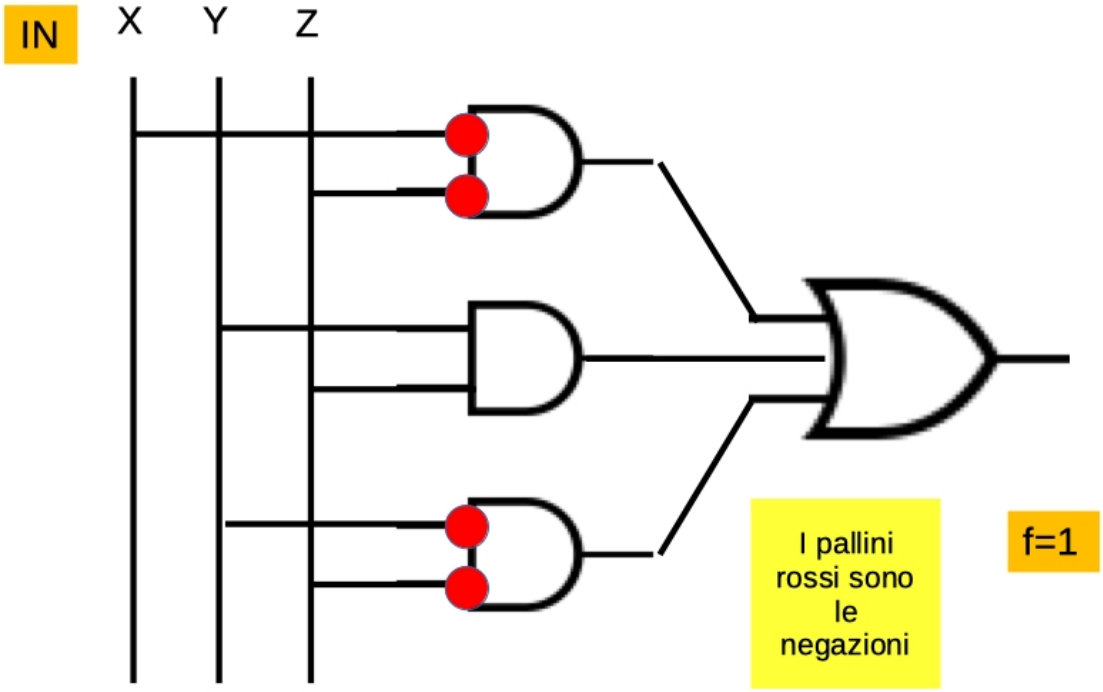
Figura 13 f iniziale

Funzione f in funzione del OUT 1

$$f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,\bar{z} + \bar{x}\,y\,z + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,z$$

Funzione f ridotta con il metodo di Robinson

$$f(xyz) = \bar{x}\,\bar{z} + yz + \bar{y}\,\bar{z}$$



La funzione è rappresentata da 3 minitermini che danno come risultato 1. Questa rappresentazione è la forma SP, Somme Prodotti. I prodotti sotto intesi, sono porte AND le somme sono porte OR. Nella f iniziale i i minitermini erano prodotti di 3 fattori, nella forma ridotta vi sono prodotti di 2 fattori.

Figura 14 f ridotta secondo metodo di Robinson

Flip-Flop

Questa strana parola sta ad indicare un particolare circuito che è in grado di memorizzare un bit in modo stabile. Usando sempre e le Logic Gates siamo in grado di creare la memoria dei risultati ottenuti.

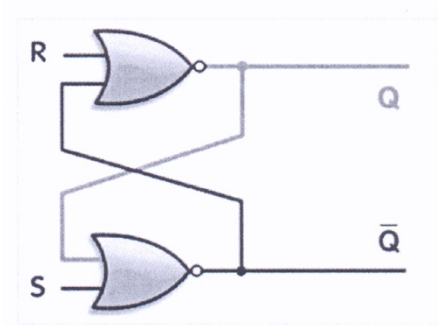
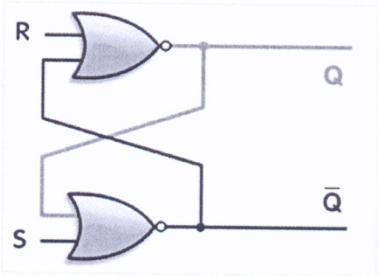


Figura 15 Circuito flip-flop

Archiviazione dei dati e logica sequenziale

I cancelli logici possono anche essere utilizzati per contenere uno stato, consentendo l'archiviazione dei dati. Un elemento di stoccaggio può essere costruito collegando diversi cancelli in un circuito "a chicca". I circuiti di bloccaggio sono utilizzati nella memoria statica ad accesso casuale. Disegni più complicati che utilizzano i segnali dell'orologio e che cambiano solo su un bordo ascendere o in caduta dell'orologio sono chiamati flip-flops ". Formalmente, un flip-flop è chiamato circuito bistabile, perché ha due stati stabili che può mantenere indefinitamente. La combinazione di più flip-flop in parallelo, per memorizzare un valore a più bit, è nota come registro. Quando si utilizza una di queste impostazioni di gate, il sistema complessivo ha memoria; viene quindi chiamato un sistema logico sequenziale poiché la sua uscita può essere influenzata dai suoi stati precedenti, cioè dalla *sequenza* di stati di input. Al contrario, l'output dalla logica combinata è puramente una combinazione dei suoi attuali input, non influenzato dagli stati di input e output precedenti.



Animazione di come funziona un latch SR NOR gate.

Questi circuiti logici sono utilizzati nella memoria del computer. Variano nelle prestazioni, in base a fattori di velocità, complessità e affidabilità dello storage e molti tipi diversi di design vengono utilizzati in base all'applicazione.

Figura 16 Archiviazione dati da Wikipedia

Per chiudere un omaggio ad uno dei più grandi filosofi e matematici degli USA: Charles Sanders Peirce. Il suo contributo nella moderna era informatica è stato fondamentale.

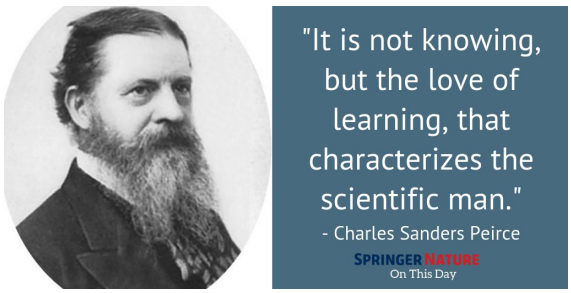


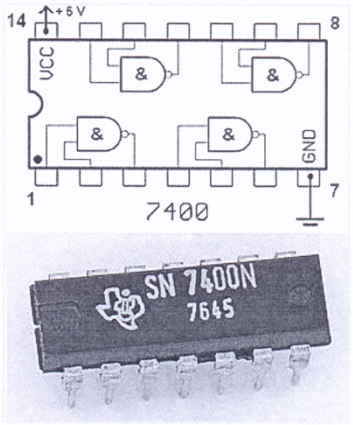
Figura 17 Pierce

“Vi sono tre cose che non possiamo mai sperare di raggiungere con il ragionamento: la certezza assoluta, l'esattezza assoluta, l'universalità assoluta.”

Charles Sanders Peirce

Figura 18 Charles Sanders Peirce

Esempi congruenti con quanto trattato fin ad ora



Il chip 7400, contenente quattro NAND. I due pin aggiuntivi forniscono energia (+5 V) e collegano il terreno.

Figura 19 CHIP 7400

Porte logiche universali

Charles Sanders Peirce (durante il 1880-1881) ha mostrato che le porte NOR da sole (o in alternativa solo le porte NAND) possono essere utilizzate per riprodurre le funzioni di tutte le altre porte logiche, ma il suo lavoro su di esso è stato inedito fino al 1933.[18] La prima prova pubblicata è stata di Henry M. Sheffer nel 1913, quindi l'operazione logica NAND è talvolta chiamata *tratto di Sheffer;* il NOR logico è talvolta chiamato *freccia di Peirce*.[19] Di conseguenza, queste porte sono talvolta chiamate *porte logiche universali*.[20]

Figura 20 Porte logiche universali tratto da Wikipedia